## 19. Darstellung von Zahlen durch Formen

In Siegels Arbeit aus dem Jahre 1935 werden Darstellungen von Formen durch Formen betrachtet, das heißt es werden die $X = X_{n,m} \bmod p^k$ gezählt, für die $X'SX \equiv T \bmod p^k$ mit gegebenen $S = S_{n,n}$ und $T = T_{m,m}$. Bei der Herstellung des Zusammenhanges mit Tamagawa-Zahlen beschränken wir uns auf den Fall $m = 1$, das heißt die Darstellung von Zahlen durch Formen, das ist interessant und schwierig genug. Und wir betrachten (wie Siegel in der ersten Arbeit) positiv definite Formen.

Sei $V$ ein $n$-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{Q}$ mit einer positiv definiten quadratischen Form $( \ , \ )$, $n \geq 4$ und $t > 0$ eine ganze Zahl. $M$ sei ein Gitter in $V$, und es wird wie immer angenommen, daß die Form auf $M$ nur ganzzahlige Werte annimmt. Wir betrachten Paare $(x, M)$ wo $x \in M$ und $(x, x) = t$ ist. Wir übernehmen die Bezeichnungen der früheren Kapitel: $G, G_{\mathbb{Q}}, G_A, G_A(M)$ usw.

*Definition*: $(x, M) \sim (y, N)$ wenn es $\Phi \in G_A$ gibt mit $\Phi x = y$ und $\Phi M = N$. Für festes $(a, M)$ heißt $\{(x, N) \sim (a, M)\}$ das Geschlecht von $(a, M)$.

*Definition*: $(x, M) \approx (y, N)$ wenn es $\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$ gibt mit $\sigma x = y$ und $\sigma M = N$. Für festes $(a, M)$ heißt $\{(x, N) \approx (a, M)\}$ die Klasse von $(a, M)$.

Unserem früheren Sprachgebrauch entsprechend müßten wir eigentlich von "engerer Klasse" reden, aber wir betrachten im Folgenden immer nur die Gruppe $G$ und schenken uns in diesem Kapitel das "enger".

Wenn $a, x \in V_{\mathbb{Q}}$ und $\Phi \in G_A$ und $\Phi a = x$, dann gibt es, da $n \geq 3$, ein $\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$ mit $x = \sigma a$, und $\sigma^{-1}\Phi$ liegt im Stabilisator $Stab(a)_A$. Die $(x, N) \sim (a, M)$ werden also gegeben in der Form $(\Phi a, \Phi M)$ mit $\Phi \in G_{\mathbb{Q}} Stab(a)_A$.

**Lemma 1.** *Die Klassen im Geschlecht von $(a, M)$ entsprechen umkehrbar eindeutig den Doppelnebenklassen*

$$Stab(a)_{\mathbb{Q}} \, \phi \, [Stab(a)_A \cap G_A(M)] \subset Stab(a)_A$$

Beweis: Alle $(x, N) \sim (a, M)$ sind von der Gestalt $(\sigma\phi a, \sigma\phi M) = (\sigma a, \sigma\phi M)$ mit $\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$ und $\phi \in Stab(a)_A$, und die Klasse von $(\sigma a, \sigma\phi M)$ ist dieselbe wie die von $(a, \phi M)$, also durch $\phi$ bestimmt. Dabei ist

$$(a, \phi M) \approx (a, \psi M) \Leftrightarrow \text{ es gibt } \sigma \in G_{\mathbb{Q}} \text{ mit } a = \sigma a, \ \psi M = \sigma\phi M \Leftrightarrow$$

$$\phi \in Stab(a)_{\mathbb{Q}} \psi G_A(M) \Leftrightarrow \phi \in Stab(a)_{\mathbb{Q}} \, \psi \, [G_A(M) \cap Stab(a)_A]$$

**Lemma 2.** *Sei $(a, M)$ fest und ebenso $M^*$. Die Anzahl der Paare $(x, M^*) \approx (a, M)$ ist*

$$= \begin{cases} 0 & \textit{wenn } M^* \not\simeq M \\ (G(M) : [G(M) \cap Stab(a)]) & \textit{wenn } M^* \simeq M \end{cases}$$

Beweis: Die erste Zeile ist klar. Zur zweiten: Wenn $M^* = \sigma_0 M$, dann sind die $(x, M^*) \approx (a, M)$ genau alle $(\sigma_0 \rho a, \sigma_0 \rho M)$ mit $\rho \in G(M)$, und $(\sigma_0 \rho_1 a, \sigma_0 \rho_1 M) = (\sigma_0 \rho_2 a, \sigma_0 \rho_2 M) \Leftrightarrow \rho_1^{-1} \rho_2 \in G(M) \cap Stab(a)$. Das beweist die zweite Zeile.

Da $Stab(a)_{\mathbb{Q}}\backslash Stab(a)_A$ kompakt ist (Satz 3, Kapitel 4) und $G_A(M)$ offen (in $G_A$ ) ist, gibt es in Lemma 1 nur endlich viele Doppelnebenklassen. Sie mögen vertreten sein durch $\psi_1, ...., \psi_N$ . Es sei $A(a, M, M^*)$ die Anzahl der $(x, M^*) \sim (a, M)$ . Aus Lemma 1 und 2 folgt

$$A(a, M, M^*) = \sum_{j=1}^{N} \{Anzahl\ der\ (x, M^*) \approx (a, \psi_j M)\}$$

$$= \sum_{j=1,\, \psi_j M \simeq M^*}^{N} (G(\psi_j M) : [Stab(a) \cap G(\psi_j M)])$$

Es kann natürlich nur dann $(x, M^*) \sim (a, M)$ geben, wenn $M^*$ im Geschlecht von $M$ liegt. Wenn $M_1, ....., M_h$ Vertreter für die Klassen im Geschlecht von $M$ sind (hier ist $h$ das $h^+$ aus Kapitel 13), dann muß also $M^*$ zu einem der $M_i$ isomorph sein, damit überhaupt $A(a, M, M^*) \neq 0$ ist. Wir benutzen die Formel für $M_k$ statt $M^*$ :

$$A(a, M, M_k) = \sum_{j=1,\, \psi_j M \simeq M_k}^{N} (G(\psi_j M) : [Stab(a) \cap G(\psi_j M)])$$

$$= \sum_{j=1, \psi_j M \simeq M_k}^{N} \frac{|G(M_k)|}{|Stab(a) \cap G(\psi_j M)|}$$

Summieren wir dies über $k$ , so erhalten wir

(1) $$\sum_{k=1}^{h} \frac{A(a, M, M_k)}{|G(M_k)|} = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{|Stab(a) \cap G(\psi_j M)|}$$

denn jedes $\psi_j M$ ist zu genau einem $M_k$ isomorph.

Aus der Doppelnebenklassenzerlegung

$$Stab(a)_A = \cup_{j=1}^{N} Stab(a)_{\mathbb{Q}}\ \psi_j\ [Stab(a)_A \cap G_A(M)]$$

folgt

$$vol(Stab(a)_{\mathbb{Q}}\backslash Stab(a)_A) = \sum_{j=1}^{N} vol(Stab(a)_{\mathbb{Q}}\backslash Stab(a)_{\mathbb{Q}}\psi_j [Stab(a)_A \cap G_A(M)])$$

$$= \sum_{j=1}^{N} vol(Stab(a)_{\mathbb{Q}}\backslash Stab(a)_{\mathbb{Q}}[Stab(a)_A \cap G_A(\psi_j M)])$$

weil $vol$ rechtsinvariant und $\psi_j a = a$

$$= \sum_{j=1}^{N} vol([Stab(a)_{\mathbb{Q}} \cap G(\psi_j M)]\backslash[Stab(a)_A \cap G_A(\psi_j M)]$$

( vergleiche den Homeomorphiesatz in Kapitel 7 )

$$= \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{|Stab(a)_{\mathbb{Q}} \cap G(\psi_j M)|} \; vol(Stab(a)_A \cap G_A(\psi_j M))$$

$$= vol(Stab(a)_A \cap G_A(M)) \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{|Stab(a)_{\mathbb{Q}} \cap G(\psi_j M)|}$$

weil $G_A(\psi_j M) \cap Stab(a)_A$ innerhalb $Stab(a)_A$ zu $G_A(M) \cap Stab(a)_A$ konjugiert ist.

Am Anfang der Rechnung steht auf der linken Seite die Tamagawa-Zahl ( $= 2$ ) von $Stab(a)$ , denn dieser ist die spezielle orthogonale Gruppe des $(n-1 \geq 3)$ -dimensionalen Raumes $a^{\perp}$ ( $n \geq 4$ ). Setzen wir das ein, so erhalten wir

$$\frac{2}{vol(Stab(a)_A \cap G_A(M))} = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{|Stab(a)_{\mathbb{Q}} \cap G(\psi_j M)|}$$

Vergleichen wir dies mit (1), so kommt

$$\sum_{k=1}^{h} \frac{A(a, M, M_k)}{|G(M_k)|} = \frac{2}{vol(G_A(M) \cap Stab(a)_A)} \qquad (2)$$

Sei $\Sigma$ die Sphäre $(x,x) = t$ . Auf $\Sigma_A \cap M_A$ operiert die Gruppe $G_A(M)$ . Wir teilen $\Sigma_A \cap M_A$ in Bahnen:

$$\Sigma_A \cap M_A = \cup_{i=1}^{r} G_A(M) z_i$$

Weil die Bahnen $G_A(M)z$ offen sind und $\Sigma_A \cap M_A$ kompakt, sind es tatsächlich endlich viele.

**Lemma 3.** *Jede Bahn kann vertreten werden durch ein* $\Phi_{k_i}^{-1} x_i$ , *wo* $\Phi_{k_i} M = M_{k_i}$ *eines der Gitter* $M_1, ...., M_h$ *und* $x_i \in M_{k_i}$ *ist.*

Beweis: Sei $z \in \Sigma_A \cap M_A$ gegeben. Da $n \geq 4$ , stellt die quadratische Form jede positive Zahl rational dar. Also gibt es $x \in V_{\mathbb{Q}}$ mit $(x,x) = t$ . Dem Beweis von Lemma 1 in Kapitel 4 entnimmt man, daß $G_A$ transitiv auf $\Sigma_A$ operiert. Daher gibt es $\Phi \in G_A$ mit $x = \Phi z$ . Das Gitter $\Phi M$ liegt im Geschlecht von $M$ , ist also $= \tau M_k$ für ein $\tau \in G_{\mathbb{Q}}$ und einen Klassenvertreter $M_k$ . Schreibt man $M_k = \Phi_k M$ , so ist $\Phi_k^{-1} \tau^{-1} \Phi \in G_A(M)$ . Wegen $x \in \Phi M = \tau M_k$ ist $y := \tau^{-1} x \in M_k$ und

$$G_A(M) z = G_A(M) \Phi_k^{-1} \tau^{-1} \Phi z = G_A(M) \Phi_k^{-1} \tau^{-1} x = G_A(M) \Phi_k^{-1} y$$

mit $y \in M_k$ . Damit haben wir einen Vertreter der gewünschten Art gefunden.

Wir haben nun eine disjunkte Zerlegung

$$\Sigma_A \cap M_A = \cup_{i=1}^{r} G_A(M) \Phi_{k_i}^{-1} x_i$$

mit gewissen $k_i$ und $x_i \in M_{k_i}$ .

Sei nun $M_k$ irgendeiner der Klassenrepräsentanten und $x \in M_k$ mit $(x,x) = t$. Dann ist $\Phi_k^{-1}x \in \Sigma_A \cap M_A$, liegt also in einer der Bahnen $G_A(M)\Phi_{k_i}^{-1}x_i$, ist also ein $\Phi\Phi_{k_i}^{-1}x_i$ mit $\Phi \in G_A(M)$. Die Gleichungen

$$x = \Phi_k \Phi \Phi_{k_i}^{-1} x_i \text{ und } M_k = \Phi_k M = \Phi_k \Phi M = \Phi_k \Phi \Phi_{k_i}^{-1} M_{k_i}$$

setzen in Evidenz, daß

$$(x, M_k) \sim (x_i, M_{k_i})$$

(und diese Äquivalenz hat statt für genau ein $i$). Bezeichnet $A(t, M_k)$ die Anzahl aller $x \in M_k$ mit $(x,x) = t$, so folgt

$$A(t, M_k) = \sum_{i=1}^{r} A(x_i, M_{k_i}, M_k) \tag{3}$$

Volumenberechnung: Die Sphäre $\Sigma$ ist ein homogener Raum der speziellen orthogonalen Gruppe $G$, der Stabilisator des Vektors $a \in \Sigma$ ist die spezielle orthogonale Gruppe des $(n-1)$-dimensionalen Raumes $a^{\perp}$. Wie in Kapitel 4 gesehen, ist auch die Abbildung $\pi : G_A \to \Sigma_A$ surjektiv. Sei $\bar{\omega}_A$ das Tamagawa-Maß von $Stab(a)$ und wie früher $\omega_A$ das von $G$. Sei $\psi_A$ das durch

$$\int_{G_A} f(X)\omega_A(X) = \int_{\Sigma_A} (\int_{Stab(a)_A} f(Xu)\bar{\omega}_A(u))\ \psi_A(Xa)$$

bestimmte Maß auf $\Sigma_A$ (vgl Kapitel 7). Wir benutzen diese Formel, wenn $f$ die Indikatorfunktion der kompakten Untergruppe $G_A(M)$ ist. Dann steht auf der linken Seite das Volumen von $G_A(M)$, und auf der rechten Seite ist das innere Integral über $Stab(a)_A$ gleich 0, wenn es gar kein $u \in Stab(a)_A$ gibt mit $Xu \in G_A(M)$. Gibt es hingegen ein solches, etwa $Xu_0 = \Phi \in G_A(M)$, so gilt

$$Xu \in G_A(M) \Leftrightarrow u_0^{-1}u \in G_A(M) \cap Stab(a)_A$$

und das innere Integral ist

$$\int_{Stab(a)_A} f(Xu)\bar{\omega}_A(u) = \int_{u \in u_0(Stab(a)_A \cap G_A(M))} \bar{\omega}_A(u) = vol(Stab(a)_A \cap G_A(M))$$

Daher ist

$$vol(G_A(M)) = vol(Stab(a)_A \cap G_A(M)) \cdot \int_{z \in G_A(M)a} \psi_A(z)$$

Dies benutzen wir für die Paare $x_i, M_{k_i}$ anstelle von $a, M$. Weil $G_A(M_{k_i})$ in $G_A$ zu $G_A(M)$ konjugiert ist (also beide dasselbe Volumen haben), erhalten wir

$$\frac{vol(G_A(M))}{vol(Stab(x_i)_A \cap G_A(M_{k_i}))} = \int_{z \in G_A(M_{k_i})x_i} \psi_A(z)$$

Der Integrationsbereich $G_A(M_{k_i})x_i$ ist $= \Phi_{k_i} G_A(M) \phi_{k_i}^{-1} x_i$, und weil $\psi$ invariant unter $G$ ist (Beweis in Kapitel 20, Lemma 1) , ist das Integral auf der rechten Seite $= \int_{z \in G_A(M)\Phi_{k_i}^{-1}x_i} \psi_A(z)$. Die linke Seite ersetzen wir nach Gleichung (2) und erhalten

$$\frac{1}{2} vol(G_A(M)) \cdot \sum_{k=1}^{h} \frac{A(x_i, M_{k_i}, M_k)}{|G(M_k)|} = \int_{z \in G_A(M)\Phi_{k_i}^{-1}x_i} \psi_A(z)$$

Summieren wir dies über $i$, so erhalten wir auf der rechten Seite das Integral über $\Sigma_A \cap M_A$ , und auf der linken Seite taucht nach (3) die Darstellungszahl $A(t, M_k)$ auf. Das ergibt

$$\sum_{k=1}^{h} \frac{A(t, M_k)}{|G(M_k)|} = \frac{2}{vol(G_A(M))} \cdot \int_{\Sigma_A \cap M_A} \psi_A(z)$$

Die linke Seite ist das Ziel unserer Mühe, auf der rechten Seite wollen wir einen anderen Ausdruck für das Integral finden.