14. Beispiele

Als erstes Beispiel behandeln wir die Gitter $\mathbb{Z}^n$ für $n \leq 8$, also $M = \sum_{i=1}^n \mathbb{Z}e_i$ mit $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$. Wir müssen die α_p bestimmen. Nach Definition war

$$\alpha_p = \frac{1}{2} p^{-m\frac{n(n-1)}{2}} A_m \text{ für } m >> 0$$

mit

$$A_m = |\{X \bmod p^m \mid X'AX \equiv A \bmod p^m\}|$$

Für $A =$ Einheitsmatrix zeigt das Hensel'sche Lemma, daß $m = 1$ genügt, wenn $p \neq 2$, und $m = 3$ für $p = 2$. Wir entledigen uns zuerst des schwierigeren Falles $p = 2$. Zur Vereinfachung schreiben wir in diesem Teil M statt M_2.

Lemma 1. *Die Automorphismengruppe von* M *ist transitiv auf* $\{x \in M \mid (x,x) = 1\}$.

Beweis: Der Fall $n = 1$ ist trivial. Sei also $2 \leq n \leq 8$ und $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in M$ mit $(x,x) = 1$. Sei t die Anzahl der ungeraden x_i (gemeint sind die x_i mit $|x_i|_2 = 1$): Dann ist $1 = (x,x) = \sum_{i=1}^n x_i^2 \equiv t \bmod 4$, wegen $n \leq 8$ also $t = 1$ oder $t = 5$. Daher gibt es ein gerades x_j (wenn $t = 1$ weil $n > 1$ und wenn $t = 5$ wegen $5 \not\equiv 1 \bmod 8$). Man setzt $s = x - e_j$. Dann ist $(s,s) \equiv 2 \bmod 4$ und die Spiegelung längs s führt M in sich und x in e_j über. Da die Permutationen der e_i ebenfalls Automorphismen von M sind, kann man jedes x mit $(x,x) = 1$ in e_1 überführen.

Folgerung: Wenn $x \in M$ und $(x,x) \equiv 1 \bmod 8$, dann gibt es einen Automorphismus τ von M mit $\mathfrak{o}_2 \tau x = \mathfrak{o}_2 e_1$.
Beweis: Jede Zahl $\equiv 1 \bmod 8$ ist Quadrat in $\mathfrak{o}_2$. Also gibt es eine Einheit ρ mit $(x,x) = \rho^2$. Auf $\frac{1}{\rho}x$ kann man das Lemma anwenden.

Bemerkung: Für $n = 9$ ist das Lemma nicht richtig: Sei $x = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^9 e_i$. Dann ist $(x,x) = 1$. Die Vektoren im Orthokomplement von x sind die y mit $\sum_{i=1}^9 y_i = 0$. Für diese ist $(y,y) = \sum_{i=1}^9 y_i^2 \equiv 0 \bmod 2$. Also enthält $M \cap x^\perp$ keine Einheitsvektoren, wohl aber $e_1^\perp$. Also kann man sicherlich nicht x in e_1 durch einen Automorphismus von M überführen.

Jetzt sei $A_8(n,1)$ die Anzahl der $x \bmod 8$ in M mit $(x,x) \equiv 1 \bmod 8$.

$n = 1$:

$$A_8(1,1) = 4$$

$n = 2$: Ist $x_1^2 + x_2^2 \equiv 1 \bmod 8$, so ist genau eines der x_i ungerade und dann das andere $\equiv 0$ oder $4 \bmod 8$. Dafür gibt es $2 \cdot 4 \cdot 2$ Möglichkeiten.

$$A_8(2,1) = 16$$

$n = 3$: Sei $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \equiv 1 \bmod 8$. Ist t die Anzahl der ungeraden x_i, so ist $t \equiv 1 \bmod 4$, also $t = 1$. Ist etwa x_1 ungerade, so ist $x_2^2 + x_3^2 \equiv 0 \bmod 8$. Also sind x_2^2 und x_3^2 entweder beide 0 oder beide $4 \bmod 8$. Das heißt x_2 und x_3 sind beide $\equiv 2,6 \bmod 8$ oder beide $\equiv 0,4 \bmod 8$. Dafür gibt es $2 \cdot 4 = 8$ Möglichkeiten.

Das ungerade x_1 kann 4 Werte annehmen, und statt x_1 könnte auch x_2 oder x_3 ungerade sein. Zusammen sind das $3 \cdot 4 \cdot 8$ Möglichkeiten.

$$A_8(3,1) = 3 \cdot 2^5$$

$n = 4:$ Wieder ist $t = 1$. Die Anzahl s der $x_i \equiv 2 \text{ oder } 6 \bmod 8$ ist gerade.

$s = 0:$ $x_2, x_3, x_4 \equiv 0 \text{ oder} 4 \bmod 8$. das sind 2^3 Möglichkeiten.
$s = 2:$ Ein x_i ist 0 oder 4, die beiden anderen 2 oder $6 \bmod 8$. Zusammen sind das $4 \cdot 4 \cdot (2^3 + 3 \cdot 2^3)$ Möglichkeiten.

$$A_8(4,1) = 2^9$$

$n = 5:$ Wegen $t \neq n$ (sonst wäre $1 \equiv (x,x) \equiv n \bmod 8$) fällt $t = 5$ immer noch aus, es ist $t = 1$. Und wieder ist s gerade. Wir zählen die x mit festem ungeraden x_1.

$s = 0:$ $x_2, ..., x_5 \equiv 0,\, 4 \bmod 8$. Das sind 2^4 Vektoren.
$s = 2:$ Ein Paar ist $2, 6$, das andere $0, 4 \bmod 8$. Das ergibt $\binom{4}{2} \cdot 2^4$ Vektoren.
$s = 4:$ Alle $x_i \equiv 2, 6 \bmod 8$. Das sind 2^4 Vektoren.

Zusammen sind das $5 \cdot 4 \cdot (2^4 + 6 \cdot 2^4 + 2^4)$ Vektoren.

$$A_8(5,1) = 5 \cdot 2^9$$

$n = 6:$ Jetzt kann in der Tat $t = 1$ oder $t = 5$ sein. Für $t = 5$ sind etwa $x_1, ..., x_5$ ungerade und x_6 gerade. Dann ist $(x,x) \equiv 5 + x_6^2 \bmod 8$, und daraus folgt $x_6 \equiv 2, 6 \bmod 8$. Also haben wir $6 \cdot 4^5 \cdot 2 = 3 \cdot 2^{12}$ Vektoren mit $t = 5$.
Für $t = 1$ haben wir
$s = 0$ mit 2^5 Fällen
$s = 2$ mit $\binom{5}{2} \cdot 2^5$ Fällen
$s = 4$ mit $5 \cdot 2^5$ Fällen.

Das sind $6 \cdot 4 \cdot 2^5 \cdot (1 + 10 + 5) = 3 \cdot 2^{12}$ Fälle mit $t = 1$. Zusammen

$$A_8(6,1) = 3 \cdot 2^{13}$$

$n = 7:$ Für $t = 5$, etwa $x_1, ..., x_5$ ungerade, muß $5 + x_6^2 + x_7^2 \equiv 1 \bmod 8$ sein, also $x_6^2 + x_7^2 \equiv 4 \bmod 8$. Dazu muß $x_6 \equiv 2, 6 \bmod 8$ und $x_7 \equiv 0, 4 \bmod 8$ sein oder umgekehrt. Dafür gibt es $2 \cdot 2 \cdot 2$ Möglichkeiten. Das ergibt $\binom{7}{2} \cdot 4^5 \cdot 2^3$ Fälle mit $t = 5$.
Mit $t = 1$ haben wir zunächst bei festem ungeraden x_1
$s = 0$ mit 2^6 Fällen
$s = 2$ mit $\binom{6}{2} \cdot 2^6$ Fällen
$s = 4$ mit $\binom{6}{2} \cdot 2^6$ Fällen
$s = 6$ mit 2^6 Fällen.

Das sind $7 \cdot 4 \cdot 2^6 (1 + 15 + 15 + 1)$ Vektoren mit $t = 1$. Adiert man dazu die für $t = 5$ erhaltenen, so erhält man

$$A(7,1) = 7 \cdot 2^{15}$$

$n = 8:$ Ist $t = 5$ und etwa $x_1, ..., x_5$ ungerade, so muß $x_6^2 + x_7^2 + x_8^2 \equiv 4 \bmod 8$ sein. Dazu muß genau eines der drei $\equiv 2, 6 \bmod 8$ sein oder alle drei. Das ergibt $3 \cdot 2^3 + 2^3 = 2^5$ Vektoren, also von $t = 5$ einen Beitrag $\binom{8}{5} \cdot 4^5 \cdot 2^5 = 7 \cdot 2^{18}$.

Für $t=1$ haben wir (bei festem ungeraden x_1)
$s=0$ mit 2^7
$s=2$ mit $\binom{7}{2}\cdot 2^7 = 7\cdot 3\cdot 2^7$
$s=4$ mit $\binom{7}{4}\cdot 2^7 = 7\cdot 5\cdot 2^7$
$s=6$ mit $7\cdot 2^7$ Vektoren. Der Beitrag von $t=1$ ist also $8\cdot 4\cdot 2^7\cdot(1+21+35+7)=2^{18}$.

$$A_8(8,1)=2^{21}$$

Nun zählen wir die ganzen Matrizen modulo 8 mit $X'X \equiv 1 \bmod 8$. Ist a die erste Spalte von X, so gilt für die übrigen Spalten b, daß $b'a \equiv 0 \bmod 8$. Da $a'a \equiv 1 \bmod 8$, gibt es nach der Folgerung zu Lemma 1 einen Gitterautomorphismus τ mit $\mathfrak{o}_2\tau a = \mathfrak{o}_2 e_1$. Daher ist die Anzahl der möglichen Spalten $b \bmod 8$ mit $b'a \equiv 0 \bmod 8$ und $b'b \equiv 1 \bmod 8$ genau so groß wie die Anzahl der Spalten $b \bmod 8$ in $e_1^\perp = \sum_{i=2}^n \mathfrak{o}_2 e_i$ mit $b'b \equiv 1 \bmod 8$. Daraus folgt die Rekursion: ist

$$A_8(n) = |\{X \in M_n(\mathfrak{o}_2) \bmod 8 \mid X'X \equiv 1 \bmod 8\}|$$

so ist

$$A_8(n) = A_8(n,1)\cdot A_8(n-1,1)......A_8(2,1)\cdot A_8(1,1)$$

Daraus finden wir

$$A_8(1)=4 \qquad A_8(2)=2^6 \qquad A_8(3)=3\cdot 2^{11}$$
$$A_8(4)=3\cdot 2^{20} \qquad A_8(5)=3\cdot 5\cdot 2^{29} \qquad A_8(6)=3^2\cdot 5\cdot 2^{42}$$
$$A_8(7)=3^2\cdot 5\cdot 7\cdot 2^{57} \qquad A_8(8)=3^2\cdot 5\cdot 7\cdot 2^{78}$$

Für die Siegel'schen Zahlen $\alpha_p = \frac{1}{2}p^{-3\frac{n(n-1)}{2}}A_p$ ergibt sich daraus

n	2	3	4	5	6	7	8
α_2	4	6	6	$\frac{15}{4}$	$\frac{45}{16}$	$\frac{315}{128}$	$\frac{315}{128}$

Für $p \neq 2$ ist $\alpha_p = \frac{1}{2}p^{-\frac{n(n-1)}{2}}A_1$, und $\frac{1}{2}A_1$ ist die Ordnung der speziellen orthogonalen Gruppe G über dem Körper $\mathbb{F}_p$. Diese haben wir am Ende von Kapitel 10 bestimmt. Speziell für die Form $\sum x_i^2$ ($\det V = 1$) übernehmen wir

$$\alpha_p(3) = 1-p^{-2}$$

$$\alpha_p(4) = (1-p^{-2})^2$$

$$\alpha_p(5) = (1-p^{-2})(1-p^{-4})$$

$$\alpha_p(6) = (1-p^{-2})(1-p^{-4})(1-(\frac{-1}{p})p^{-3})$$

$$\alpha_p(7) = (1-p^{-2})(1-p^{-4})(1-p^{-6})$$

$$\alpha_p(8) = (1-p^{-2})(1-p^{-4})^2(1-p^{-6})$$

Für $n \geq 3$ ist das Produkt der α_p absolut konvergent. Zum Beispiel erhält man für $n = 8$

$$\prod_p \alpha_p = \alpha_2 \prod_{p \neq 2} \alpha_p = \frac{315}{128} \cdot \prod_{p \neq 2} (1 - p^{-2})(1 - p^{-4})^2 (1 - p^{-6})$$

$$= \frac{315}{128} \cdot \frac{4 \cdot 16^2 \cdot 64}{3 \cdot 15^2 \cdot 63} \cdot \frac{1}{\zeta(2)\zeta(4)^2\zeta(6)} = \frac{2^{12} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7}{\pi^{16}}$$

Dies eingesetzt in die Maßformel ergibt auf der rechten Seite

$$\frac{2\Gamma(\frac{1}{2}).....\Gamma(\frac{7}{2})\Gamma(4) \cdot \pi^{16}}{\pi^{18} \cdot 2^{12} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7} = \frac{1}{2^{15} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7}$$

Die Automorphismengruppe des Gitters $\mathbb{Z}^n$ besteht offenbar aus allen Permutationsmatrizen mit Einträgen ± 1 und hat die Ordnung $2^8 \cdot 8! = 2^{15} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$. Die Maßformel zeigt jetzt: Im Geschlecht der 8-reihigen Einheitsform liegt nur eine Klasse.

Zur Kontrolle vergleichen wir auch noch mit dem Siegel'schen Beispiel $n = 5$:

$$\prod \alpha_p = \alpha_2 \prod_{p \neq 2} \alpha_p = \frac{15}{4} \prod_{p \neq 2} (1 - p^{-2})(1 - p^{-4}) = \frac{15}{4} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{16}{15} \cdot \frac{1}{\zeta(2)\zeta(4)} = \frac{2^6 \cdot 3^2 \cdot 5}{\pi^6}$$

Dies eingesetzt in die Maßformel ergibt auf der rechten Seite

$$\frac{2\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(\frac{5}{2}) \cdot \pi^6}{\sqrt{\pi}^{15} \cdot 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5} = \frac{1}{2^8 \cdot 3 \cdot 5}$$

Die Ordnung der Automorphismengruppe ist $2^5 \cdot 5! = 2^8 \cdot 3 \cdot 5$: Also folgt wieder, daß im Geschlecht der 5-reihigen Einheitsform nur eine Klasse liegt.

Auf dieselbe Weise kann man für alle $n \neq 6$ mit $3 \leq n \leq 8$ einsehen, daß im Geschlecht von $\mathbb{Z}^n$ nur eine Klasse liegt. Für $n = 6$ liefert die Minkowski-Siegel'sche Formel

$$\sum_{i=1}^{h} \frac{1}{E(M_i)} = \frac{1}{2^5 \cdot 3^2 \cdot 5} \cdot \frac{L(3,\chi)}{2\pi^3} = \frac{1}{6! \cdot 2^6} \cdot \frac{2^5 \cdot L(3,\chi)}{\pi^3}$$

wobei

$$L(s,\chi) = \prod_{p \neq 2} (1 - \chi(p)p^{-s})^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\chi(1+2k)}{(1+2k)^s}$$

die L-Reihe zum Charakter $\chi(x) = (-1)^{\frac{x-1}{2}}$ ist. Wenn man nun aus irgendeiner anderen Quelle weiß (zum Beispiel [Bö], Kapitel 12), daß im Geschlecht von $\mathbb{Z}^6$ nur eine Klasse liegt, dann muß

$$L(3,\chi) = \frac{\pi^3}{2^5}$$

sein.

Als zweites Beispiel betrachten wir das Gitter E_8. Es ist gerade, unimodular und vom Rang 8, und positiv definit. Seine Determinante ist $= 1$. Wir wollen zeigen, daß es bis auf Isomorphie das einzige Gitter mit diesen Eigenschaften ist.

Jedes unimodulare Gitter über $\mathfrak{o}_p$ für eine Primzahl $p \neq 2$ besitzt eine Orthogonalbasis $e_1, ..., e_n$ mit $(e_i, e_i) = 1$ für $i < n$. Ist seine Determinante gleich 1, so ist (e_n, e_n) Quadrat, also oE auch $= 1$. Für $p \neq 2$ haben wir also dieselben Anzahlen $A_p(n)$ wie beim Gitter $\mathbb{Z}^n$. Aber für $p = 2$ müssen wir neue Betrachtungen anstellen. Wir sagen, ein Gitter ist vom Typ $A = (a_{ij})_{i,j}$, wenn es eine Basis $u_1, ..., u_n$ besitzt mit $(u_i, u_j) = a_{ij}$.

Lemma 2. *Jedes gerade unimodulare anisotrope Gitter L vom Rang 2 über $\mathfrak{o}_2$ ist vom Typ* $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Beweis: Sei $x \in L$ mit maximalem $|(x, x)|$ (gemeint ist der 2-Betrag). Dann ist x primitiv, und, weil L unimodular, gibt es $y \in L$ mit $(x, y) = 1$. Die zugehörige Gram-Matrix ist $\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix}$. Da L anisotrop, ist $-\det L = 1 - \alpha\beta$ nicht Quadrat, also ist $\alpha\beta \not\equiv 0 \bmod 8$. Anderseits sind α und β gerade. Es folgt $\alpha = 2a,\ \beta = 2b$ mit Einheiten a, b. Für $\lambda = 1$ und $\mu = 1 - a - b (\equiv 1 \bmod 2,$ also $\mu^2 \equiv 1 \bmod 8)$ ist

$$a\lambda^2 + \lambda\mu + b\mu^2 \equiv a + (1 - a - b) + b \equiv 1 \bmod 8$$

Nach Hensel ist $a\lambda^2 + \lambda\mu + b\mu^2 = 1$ in $\mathfrak{o}_2$ lösbar, und für $u := \lambda x + \mu y$ gilt $(u, u) = 2$. Also hätten wir gleich mit einem Vektor $x \in L$ mit $(x, x) = 2$ beginnen können. L ist dann vom Typ $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2b \end{pmatrix}$ mit einer Einheit b. Dann ist $4b - 1 \equiv 3 \bmod 8,$, also $4b - 1 = 3\gamma^2$ mit einer Einheit γ in $\mathfrak{o}_2$. Nun ist $y' := \frac{1+\gamma}{2\gamma} x - \frac{1}{\gamma} y \in L$, und $(y', x) = 1$ und $(y', y') = 2$.

1. Bemerkung: Insbesondere ist $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2\epsilon \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ für jede Einheit ϵ.

2. Bemerkung: Ein gerades unimodulares Gitter, welches 0 darstellt, ist offensichtlich hyperbolisch.

Lemma 3. *Sei L gerade unimodular vom Rang $2m$ und* $\det L = (-1)^m$. *Dann ist L direkte Summe von m hyperbolischen Gittern.*

Beweis: Solange $\dim L \geq 5$, stellt L die 0 dar, und man kann ein hyperbolisches Gitter abspalten. Also ist

$$L \quad = \quad \underbrace{H \perp ..... \perp H}_{r-\ \text{mal}} \quad \perp \quad M$$

mit einem Gitter M vom Rang $2s = 0$ oder 2 oder 4, welches anisotrop und unimodular ist. Wenn es nicht 0 ist, kann man darin x, y finden mit $(x, y) = 1$. Diese spannen ein unimodulares anisotropes Gitter vom Rang 2 auf, welches man als orthogonalen direkten Summanden abspalten kann, m.a. W. $M = 0$ oder E oder $E \perp E$ mit $E = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ nach Lemma 1.

$M = E$ fällt aus, weil sonst $(-1)^m = \det L = (-1)^{m-1} \cdot 3$ und -3 nicht Quadrat.

$M = E \perp E$ fällt aus, weil sonst $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$
(nach Bemerkung 2 zu Lemma 1) isotrop wäre.

Also bleibt nur $M = 0$, und das ist die Behauptung.

Sei $L_n = \perp^n H$ direkte Summe von n hyperbolischen Gittern (vom Rang 2) und

$$A(n,t) = |\{u \in L_n, u \bmod 8 \mid (u,u) \equiv t \bmod 8\}|$$

Offenbar

(1) $$A(n,t) = \sum_{s \bmod 8} A(1,s)A(n-1,t-s)$$

$A(1,t)$ ist die Anzahl aller Paare $(\lambda, \mu) \bmod 8$ mit $2\lambda\mu \equiv t \bmod 8$. Die folgende Tabelle zeigt die Anzahl der $\lambda \bmod 8$ mit $2\lambda\mu \equiv t \bmod 8$ bei gegebenem μ :

μ	0	1	2	3	4	5	6	7	$A(1,t) = \sum$
$t = 0$	8	2	4	2	8	2	4	2	32
$t = 2$	0	2	0	2	0	2	0	2	8
$t = 4$	0	2	4	2	0	2	4	2	16

Die Zeile mit $t = 6$ ist dieselbe wie die mit $t = 2$. Aus (1) folgt

$$A(n,t) = 32A(n-1,t) + 8A(n-1,t-2) + 16A(n-1,t-4) + 8A(n-1,t-6)$$

$$= 8[A(n-1,t)+A(n-1,t-2)+A(n-1,t-4)+A(n-1,t-6)]+24A(n-1,t)+8A(n-1,t-4)$$

Die eckige Klammer ist die Anzahl aller $u \bmod 8$ in L_{n-1}, also $= 8^{2(n-1)}$. Hieraus können wir schrittweise alle $A(n,t)$ berechnen, wobei für unser Ziel $t = 0$ und 4 genügt:

$$A(n,t) = 8 \cdot 2^{6(n-1)} + 24A(n-1,t) + 8A(n-1,t-4)$$

$$\begin{array}{cc} A(1,0) = 32 & A(1,4) = 16 \\ A(2,0) = 2^7 \cdot 11 & A(2,4) = 2^7 \cdot 9 \\ A(3,0) = 2^{11} \cdot 37 & A(3,4) = 2^{11} \cdot 35 \\ A(4,0) = 2^{15} \cdot 137 & A(4,4) = 2^{15} \cdot 135 \end{array}$$

Hiervon müssen wir die Anzahl der nicht primitiven $u \bmod 8$ mit $(u,u) \equiv 0 \bmod 8$ abziehen. Das ist einfach die Anzahl aller $2u \bmod 8$ in L_n , also 4^{2n}.

Ergebnis: Die Anzahl $A^*(4,0)$ der primitiven $u \bmod 8$ mit $(u,u) \equiv 0 \bmod 8$ in jedem unimodularen Gitter vom Rang 8 mit Determinante 1 ist

$$A^*(4,0) = 2^{15} \cdot 137 - 2^{16} = 2^{15} \cdot 3^3 \cdot 5$$

Auf dieselbe Weise erhält man

$$A^*(3,0) = 2^{11} \cdot 5 \cdot 7$$

$$A^*(2,0) = 2^7 \cdot 9$$

$$A^*(1,0) = 2^4$$

Jetzt zählen wir die hyperbolischen Paare: Zu jedem primitiven u gibt es v mit $(u,v) = 1$. Man erhält alle solchen $v \bmod 8$, indem man zu einem festen v einen Vektor z mit $(z,u) \equiv 0 \bmod 8$ addiert. Also gibt es zu jedem primitiven u modulo 8 genau 8^{2n-1} Vektoren v mit $(u,v) \equiv 1 \bmod 8$. Diese v teilen wir ein in Gruppen zu je 8, nämlich $v, v-u, v-2u, ..., v-7u$. Unter diesen 8 gibt es genau zwei mit $(v-\lambda u, v-\lambda u) \equiv 0 \bmod 8$, nämlich für $2\lambda \equiv (v,v) \bmod 8$. Ein Viertel aller Vektoren v mit $(u,v) \equiv 1 \bmod 8$ erfüllt also zusätzlich $(v,v) \equiv 0 \bmod 8$. Zu jedem u gibt es also $\frac{1}{4} \cdot 8^{2n-1} = 2^{6n-5}$ Vektoren v.

Ergebnis: In L_n gibt es $B^*(n) := A^*(n) \cdot 2^{6n-5}$ Paare $u, v \bmod 8$ mit $(u,u) \equiv (v,v) \equiv 0 \bmod 8$ und $(u,v) \equiv 1 \bmod 8$. Die Werte sind

$$B^*(1) = 2^5$$

$$B^*(2) = 2^{14} \cdot 3^2$$

$$B^*(3) = 2^{24} \cdot 5 \cdot 7$$

$$B^*(4) = 2^{34} \cdot 3^3 \cdot 5$$

Jedes solche Paar spannt ein hyperbolisches Gitter auf; denn seine Gram-Determinante ist (-1) mal ein Quadrat.

Jetzt sei X eine lineare Abbildung von

$$L_n = H \perp ..... \perp H$$

auf sich mit

$$(Xx, Xy) \equiv (x,y) \bmod 8 \text{ für alle } x, y \in L_n$$

XH wird von einem modulo 8 hyperbolischen Paar u, v aufgespannt, ist also ein hyperbolisches Teilgitter und kann direkt abgespalten werden:

$$L_n = XH \perp M$$

Es ist (sinngemäß alles bis auf Quadrate)

$$(-1)^n = \det L_n = \det(XH) \det M = (-1) \cdot \det M$$

Damit erfüllt M die Voraussetzung von Lemma 2: M ist gerade, unimodular vom Rang $2(n-1)$, und $\det M = (-1)^{n-1}$. Nach Lemma 2 ist M direkte Summe von $n-1$ hyperbolischen Gittern.
Die beiden ersten Spalten von X sind u, v. Die dritte und vierte Spalte sind modulo 8 auf u und v senkrecht. Dann können wir sie modulo 8 so abändern, daß sie in M liegen. Daraus sehen wir:

Die Anzahl der $X \bmod 8$ mit $(Xx, Xy) \equiv (x,y) \bmod 8$ für alle $x, y \in L_n$ ist gleich

$$B^*(n) B^*(n-1) .... B^*(1)$$

Mit den oben gefundenen Werten von B^* ist das gleich

$$2^{77} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7$$

Nach der Siegel'schen Definition war α_2 das $\frac{1}{2} \cdot 2^{-3\cdot 28}$-fache davon, also

$$\alpha_2 = 2^{-8} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7$$

Wie schon bemerkt, sind die α_p für $p \neq 2$ dieselben wie für das Gitter $\mathbb{Z}^n$, also

$$\alpha_p = (1 - p^{-2})(1 - p^{-4})^2(1 - p^{-6})$$

Dadurch wird

$$\prod_p \alpha_p = \{2^{-8} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7\} \cdot \frac{4 \cdot 16^2 \cdot 64}{3 \cdot 15^2 \cdot 63} \cdot \frac{1}{\zeta(2)\zeta(4)^2\zeta(6)} = \frac{2^{11} \cdot 3^8 \cdot 5^3 \cdot 7}{\pi^{16}}$$

Setzt man dies in die Maßformel ein, so erhält man

$$\sum_{i=1}^{h} \frac{1}{E(M_i)} = \frac{1}{2^{14} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7}$$

Der Nenner ist gerade die Ordnung der Automorphismengruppe des aus der Theorie der Liealgebren bekannten Gitters E_8 (für einen Beweis siehe zum Beispiel [Bö], Kapitel 12). Es folgt, daß im Geschlecht von E_8 nur eine Klasse liegt. Vergleichsweise einfach ist zu sehen, daß alle geraden positiv definiten Gitter mit Determinante 1 ein Geschlecht bilden (und nur in durch 8 teilbarer Dimension existieren). Damit folgt:

Bis auf Isomorphie gibt es nur ein positiv definites unimodulares gerades Gitter vom Rang 8 über $\mathbb{Z}$