11. Berechnung der p-adischen Integrale für fast alle p

Der Tangentialraum $T_1(G)$ (vgl. Kapitel 8) bestand aus allen Matrizen Y, für die AY schiefsymmetrisch ist. Dabei war A die für die ganze Vorlesung gegebene symmetrische invertierbare Matrix mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$. Wir benutzen weiter die Basis $\{A^{-1}(e_{rs} - e_{sr})\}_{r>s}$ von $T_1(G)$. Seien y_{rs} die Koordinaten bezüglich dieser Basis: $Y = \sum_{r>s} y_{rs}A^{-1}(e_{rs} - e_{sr})$. Dann sei $dY_p = dy_{21,p}....dy_{n,n-1,p}$ das in Kapitel 3 beschriebene Volumenelement über $\mathbb{Q}_p$. Nach den Formeln des Kapitels 8 (die über $\mathbb{Q}$ definiert waren und in allen $\mathbb{Q}_p$ ihren Sinn behalten) ist

$$\frac{dY_p}{|\det(1+Y)|_p^{n-1}}$$

vermöge der Cayley-Transformation auf $G_{\mathbb{Q}_p}$ aufgefaßt invariant gegen Translationen in der Gruppe, also ein Haarsches Maß. Dieses bezeichnen wir kurz mit ω_p.

Es war

$$G_{\mathbb{Q}_p} = \{X \in M_n(\mathbb{Q}_p) \mid X'AX = A \text{ und } \det X = 1\}$$

Die X mit Einträgen in $\mathfrak{o}_p$ bilden (wegen $\det X = 1$) eine Untergruppe $G_{\mathfrak{o}_p}$, und $G_{\mathfrak{o}_p}$ ist kompakt, hat also für das Haarsche Maß endliches Volumen. Dieses wollen wir berechnen, zunächst unter der Voraussetzung, daß $p \dagger 2\det A$:

1. Schritt: Wir teilen $G_{\mathfrak{o}_p}$ in Kongruenzklassen mod p: $P_1 \equiv P_2 \bmod p$, wenn P_1 und P_2 koeffizientenweise kongruent sind mod p, also $P_1 = P_2 + pQ$ mit ganzem Q. Da P_2^{-1} ganz ist, gilt $P_1 = P_2(1 + pP_2^{-1}Q)$, und die Klammer ist $\equiv 1 \bmod p$. Ist also

$$U = \{X \in G_{\mathfrak{o}_p} \mid X \equiv 1 \bmod p\}$$

so ist

$$P_1 \equiv P_2 \bmod p \Leftrightarrow P_1 \in P_2 \cdot U$$

Es gibt nur endlich viele Kongruenzklassen (sicher weniger als p^{n^2}), etwa k. Wegen der Invarianz von ω_p haben sie alle das gleiche Volumen. Daher ist

$$\int_{G_{\mathfrak{o}_p}} \omega_p = k \cdot \int_U \omega_p$$

2. Schritt: Ist $X \leftrightarrow Y$ bei der Cayley-Transformation, so gilt

$$X \in U \Leftrightarrow Y \equiv 0 \bmod p$$

Beweis: Ist $Y \equiv 0 \bmod p$, so ist offensichtlich

$$X = (1+Y)^{-1}(1-Y) \equiv 1 \bmod p, \text{ also } X \in U$$

Ist umgekehrt $X = 1 + pT$ mit ganzem T, so ist $Y = (1-X)(1+X)^{-1} = -pT(2 + pT)^{-1} \equiv 0 \bmod p$, weil $p \neq 2$.
Nach Definition von ω_p ist nun

$$\int_U \omega_p = \int_{Y \equiv 0 \bmod p} \frac{dY_p}{|\det(1+Y)|_p^{n-1}} = \int_{Y \equiv 0 \bmod p} dY_p = p^{-\frac{n(n-1}{2}}$$

Nach Schritt 1 und 2 bleibt nun k auszurechnen. Dazu lesen wir alles modulo p und erhalten statt V einen Vektorraum $\bar{V}$ über $\mathbb{F}_p$. Wegen $p \dagger \det A$ trägt $\bar{V}$ ein nicht ausgeartetes Skalarprodukt, und $p \neq 2$. Jede Kongruenzklasse mod p liefert durch Redukion mod p eine spezielle orthogonale Transformation von $\bar{V}$. Aber auch umgekehrt: Jede spezielle orthogonale Transformation ϕ von $\bar{V}$ ist Reduktion mod p eines $P \in G_{\mathfrak{o}_p}$.
Beweis: Zu ϕ nehme man irgendein Urbild $P_0 \in M_n(\mathfrak{o}_p)$. Das muß natürlich nicht schon in $G_{\mathfrak{o}_p}$ liegen, aber weil ϕ orthogonal ist, ist

$$P_0' A P_0 \equiv A \bmod p$$

Jetzt kommt Hensel: Angenommen, man hat schon $P_0, P_1, ..., P_m$ mit

$$P_k \equiv P_{k-1} \bmod p^k \text{ für } k = 1, ..., m$$

$$P_k' A P_k \equiv A \bmod p^{k+1} \text{ für } k = 0, ..., m \tag{1}$$

Dann setzt man $P_{m+1} = P_m + p^{m+1} T$, wobei man T so bestimmt, daß (1) auch für $k = m+1$ gilt. Nämlich: Aus

$$P_m' A P_m = A + p^{m+1} X \text{ mit ganzem } X$$

folgt

$$\begin{aligned} P_{m+1}' A P_{m+1} &= A + p^{m+1} X + p^{m+1}(P_m' A T + T' A P_m) + p^{2m+2} T' A T \\ &\equiv A + p^{m+1}(X + P_m' A T + T' A P_m) \bmod p^{m+2} \text{ weil } 2m+2 \geq m+2 \end{aligned}$$

Da $p \neq 2$ und P_m^{-1} und nach Voraussetzung auch A^{-1} ganz für p ist, kann man $T = -\frac{1}{2} A^{-1} {P_m'}^{-1} X$ setzen und erhält

$$P_{m+1}' A P_{m+1} \equiv A \bmod p^{m+2}$$

Nach Konstruktion der Folge existiert $P := \lim P_m$. Er erfüllt $P' A P = A$. Aus $\det P_0 \equiv 1 \bmod p$ folgt $\det P \equiv 1 \bmod p$, und aus $P' A P = A$ folgt $(\det P)^2 = 1$. Da $p \neq 2$, folgt $\det P = 1$.

Die gesuchte Zahl k ist also gleich der Zahl der speziellen orthogonalen Transformationen des durch Reduktion modulo p entstandenen Vektorraumes $\bar{V}$ über $\mathbb{F}_p$. Diese haben wir in Kapitel 10 bestimmt. Danach erhalten wir

Für $p \dagger 2 \det A$ ist

$$\int_{G_{\mathfrak{o}_p}} \omega_p =$$

$$\begin{cases} (1-p^{-2})(1-p^{-4})......(1-p^{-(n-1)}) & \text{wenn } n \text{ ungerade} \\ (1-p^{-2})(1-p^{-4})......(1-p^{-(n-2)})(1-(\frac{(-1)^{\frac{n}{2}} \det A}{p})p^{-\frac{n}{2}}) & \text{wenn } n \text{ gerade} \end{cases} \tag{2}$$

Dieses Ergebnis setzt uns in den Stand, das Tamagawa-Maß auf G_A zu definieren: Sei $Y \mapsto X = X(Y)$ die Cayley-Transformation $T_1(G) \to G$. Für alle v ($= \infty$ oder eine Primzahl) ist durch

$$\int_{G_{\mathbb{Q}_v}} f(X)\omega_v = \int_{T_1(G)_v} f(X(Y)) \frac{dY_v}{|\det(1+Y)|_v^{n-1}}$$

(falls der Träger von f in $\{\det(1+Y) \neq 0\}$ enthalten ist) ein invariantes Integral auf $G_{\mathbb{Q}_v}$ definiert. Für die Primzahlen p ist $G_{\mathfrak{o}_p}$ eine kompakte Untergruppe, und man setzt

$$\lambda_p = \int_{G_{\mathfrak{o}_p}} \omega_p$$

Aus den Formeln (2) folgt, daß das $\prod_p \lambda_p$ absolut konvergiert, wenn $n \geq 3$ (auf die endlich vielen $p\,|2\det A$ kommt es für die Konvergenz ja nicht an). Dies ist der entscheidende Punkt: Es gibt Gruppen, für die das entsprechende Produkt nicht konvergiert.

Die Adelgruppe von G ist

$$G_A = \cup_S \, (G_S \times G^S)$$

wobei S durch alle endlichen Mengen von Bewertungen läuft und

$$G_S = \prod_{v \in S} G_{\mathbb{Q}_v} \quad \text{und } G^S = \prod_{p \notin S} G_{\mathfrak{o}_p}$$

Wir nehmen auf dem endlichen Produkt G_S das Produktmaß $\omega_S = \prod_{v\in S} \omega_v$ und auf der kompakten Gruppe G^S dasjenige Haarsche Maß ω^S, für welches G^S das Volumen $\prod_{p\notin S} \lambda_p$ bekommt. Dann nehmen wir auf $G_S \times G^S$ das Produktmaß $\omega_S\omega^S$.

Wenn $S \subset T$, dann ist $G_S \times G^S \subset G_T \times G^T$. Die Einschränkung von $\omega_T\omega^T$ auf $G_S \times G^S$ ist ein Haarsches Maß auf $G_S \times G^S$ ebenso wie $\omega_S \times \omega^S$. Die beiden sind also proportional. Für jede Funktion der Gestalt $f(x) = \prod_{v\in S} f_v(x_v) \cdot \prod_{p\notin S} \mathbf{1}_{G_{\mathfrak{o}_p}}$ liefern sie denselben Wert ($\mathbf{1} =$ Indikatorfunktion). Daher sind sie gleich.

Ist nun f eine stetige Funktion mit kompaktem Träger auf G_A, so ist dieser Träger in einem passenden $G_S \times G^S$ enthalten. Wie gerade gesehen, ist das $\int_{G_S\times G^S} f\,\omega_S\omega^S$ von S unabhängig, und dieser Wert wird als das Tamagawa-Maß $\int_{G_A} f\,\omega_A$ auf G_A definiert. Es ist wie die ω_v linksinvariant. Aus seiner Konstruktion und aus Satz 9, Kapitel 7 folgt, daß auch G_A unimodular ist