17. Quaternionenalgebren

D sei eine Quaternionenalgebra über $\mathbb{Q}$, das ist ein vierdimensionaler $\mathbb{Q}$-Vektorraum mit Basis e_0, e_1, e_2, e_3 mit $e_0 = 1, e_1^2 = a, e_2^2 = b, e_1e_2 = -e_2e_1$, $a, b \in \mathbb{Q}^*$. Für $x = x_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ wird die reduzierte Norm definiert durch

$$N(x) = x_0^2 - ax_1^2 - bx_2^2 + abx_3^2$$

In diesem Kapitel wird vorausgesetzt, daß die Norm über $\mathbb{Q}$ die 0 nicht darstellt, das bedeutet, daß die Algebra $D_{\mathbb{Q}}$ nullteilerfrei ist.

$$\frac{dx}{(Nx)^2} = \frac{dx_0 \wedge .... \wedge dx_3}{(Nx)^2}$$

ist eine invariante Differentialform auf der multiplikativen Gruppe D^*. Leider existiert das analog zu Kapitel 11 gebildete Maß auf der Adelgruppe D_A^* nicht, nämlich: Für fast alle p ist D_p der zweireihige Matrizenring über $\mathbb{Q}_p$, also $D_p^* \simeq GL_2(\mathbb{Q}_p)$ und

$$\int_{GL_2(\mathfrak{o}_p)} \frac{dx_p}{|N(x)|_p^2} = p^{-4}|GL_2(\mathbb{F}_p)| = p^{-4}(p^2-1)(p^2-p)$$

$$= (1-p^{-1})(1-p^{-2})$$

und das Produkt über p hiervon ist nicht konvergent. Aber die Formel zeigt: Setzt man $\lambda_p = (1-\frac{1}{p})^{-1}$, so konvergiert das Produkt

$$\prod_p \lambda_p \int_{GL_2(\mathfrak{o}_p)} \frac{dx_p}{|N(x)^2|_p}$$

und liefert auf dieselbe Weise wie in Kapitel 11 ein Maß auf D_A^*. Dieses bezeichnen wir mit d_A^*x, und die $\frac{dx_p}{|N(x)^2|}$ kurz mit d^*x_p.

In Kapitel 16 wurde "Standardfunktion" definiert. Für eine Standardfunktion Φ und eine komplexe Variable s wollen wir die Existenz des folgenden Integrals untersuchen:

$$\int_{D_A^*} |N(x)|^s \Phi(x) d_A^* x$$

Nach Definition ist es gleich

$$\lim_S \prod_{v\in S} \int_{D_v^*} |N(x_v)|_v^s \Phi_v(x_v)\lambda_v dx_v^* \cdot \prod_{p\notin S} \int_{D^*(\mathfrak{o}_p)} |N(x_p)|_p^s \Phi_p(x_p)\lambda_p d^*x_p$$

(dabei wurde formal $\lambda_\infty = 1$ gesetzt).

Für die Existenz muß gezeigt werden:

1. $\int_{D_v^*}$ existiert für jedes v
2. $\prod_{p\notin S} \int_{D^*(\mathfrak{o}_p)}$ konvergiert für jedes endliche S.
3. $\lim_S$ existiert.

Zu 1. Weil $\Phi_\infty = Polynom \cdot e^{-pos\ def}$, konvergiert das $\int_{D^*_\infty} |N(x)|_\infty^{s-2} \Phi_\infty(x)\ dx$ für $Re\ s > 2$. Für $p \neq \infty$ haben wir, falls $Re\ s > 2$, eine stetige Funktion über ein Kompaktum zu integrieren, also existiert auch hier das Integral für $Re\ s > 2$.

Zu 2. Bekanntlich ist $D_p \simeq M_2(\mathbb{Q}_p)$ für fast alle p. Sei S so groß, daß für alle $p \notin S$

$D_p \simeq M_2(\mathbb{Q}_p)$

Die Übergangsformeln von den x_ν in $x = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 ij$ zu den Matrixkoeffizienten x_{rs} unimodular sind

Φ_p die Indikatorfunktion von $M_2(\mathfrak{o}_p)$ ist.

Dann wird

$$\int_{D_p^*} |N(x)|_p^s \Phi_p(x)\, \lambda_p d^* x_p = \int_{GL_2(\mathbb{Q}_p) \cap M_2(\mathfrak{o}_p)} |\det x|_p^s \cdot \lambda_p \frac{dx_p}{|\det x|_p^2}$$

Aus der Zerlegung

$$GL_2(\mathbb{Q}_p) \cap M_2(\mathfrak{o}_p) = \cup_{k,l \geq 0, b \bmod p^k} \begin{pmatrix} p^k & b \\ 0 & p^l \end{pmatrix} GL_2(\mathfrak{o}_p)$$

erhalten wir für dieses Integral

$$\sum_{k,l \geq 0, b \bmod p^k} p^{-(k+l)s} \lambda_p \int_{\begin{pmatrix} p^k & b \\ 0 & p^l \end{pmatrix} GL_2(\mathfrak{o}_p)} \frac{dx_p}{|\det x|_p^2}$$

$$= \sum_{k,l \geq 0, b \bmod p^k} p^{-(k+l)s} \lambda_p \int_{GL_2(\mathfrak{o}_p)} \frac{dx_p}{|\det x|_p^2}$$

wegen der Links-Invarianz des Integrals

$$= \sum_{k,l \geq 0, b \bmod p^k} p^{-(k+l)s} \lambda_p (p^2 - 1)(p^2 - p) p^{-4}$$

$$= \frac{1 - p^{-2}}{(1 - p^{1-s})(1 - p^{-s})}$$

Das beweist gleichzeitig 2. und 3. und rechtfertigt die Definition

$$Z(s, \Phi) := \int_{D_A^*} |N(x)|^s \Phi(x) d_A^* x \tag{1}$$

und wir haben den

Satz 20. *$Z(s,\Phi)$ ist für $Re\ s > 2$ durch (1) definiert und stellt dort eine differenzierbare Funktion von s dar.*

(Die letzte Behauptung kann man durch Abschätzung des Differenzenquotienten nachrechnen).

Berechnung des Residuums an der Stelle $s = 2$:

Sei S so groß, daß die eben durchgeführte Rechnung für $p \notin S$ gilt. Dann ist

$$Z(s,\Phi) = \frac{\prod_{v\in S}\int_{D_v^*} |Nx|_v^s \Phi_v(x)\lambda_v d^*x_v}{\prod_{p\in S}(1-p^{-2})(1-p^{1-s})^{-1}(1-p^{-s})^{-1}} \cdot \frac{\zeta(s-1)\zeta(s)}{\zeta(2)}$$

Der linke Bruch (bestehend aus endlich vielen Faktoren in Zähler und Nenner) strebt für $s \to 2$ gegen

$$\frac{\prod_{v\in S}\int_{D_v^*} \Phi_v(x)\lambda_v dx_v}{\prod_{p\in S}\ (1-p^{-1})^{-1}} = \prod_{v\in S}\int_{D_v^*} \Phi_v(x)dx_v = \prod_{v\in S}\int_{D_v} \Phi_v(x)dx_v$$

(Rechtfertigung des letzten Schritts: Auf $N(x) = x_0^2 - ax_1^2 - bx_2^2 + abx_3^2 = 0$ ist $dx_0 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 = 0$). Da die Riemannsche Zetafunktion an der Stelle 1 das Residuum 1 hat, folgt

$$\lim_{s\to 2}(s-2)Z(s,\Phi) = \prod_{v\in S}\int_{D_v} \Phi_v(x)dx_v = \int_{D_A} \Phi(x)dx_A = \hat{\Phi}(0) \tag{2}$$

denn $\int_{D_p} \Phi_p(x)dx_p = 1$ für $p \notin S$.

Die "additive Rechnung": Hier wird vorausgesetzt, daß $D_{\mathbb{Q}}$ **nullteilerfrei** ist: Zuerst zerlegen wir $Z(s,\Phi)$ in einen holomorphen Summanden und den Rest: Wir setzen für $x \in D_A^*$

$$\lambda_+(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } |Nx| > 1 \\ \frac{1}{2} & \text{wenn } |Nx| = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und $\lambda_-(x) = \lambda_+(\frac{1}{x})$. Dann ist $\lambda_+(x) + \lambda_-(x) = 1$ für alle x, und mit

$$Z_\pm(s,\Phi) = \int_{D_A^*} \lambda_\pm(x)\Phi(x)|Nx|^s d_A^*x$$

ist

$$Z(s.\Phi) = Z_+(s,\Phi) + Z_-(s,\Phi)$$

Beide Integrale Z_+ und Z_- sind konvergent für $Re\ s > 2$. Das für Z_+ konvergiert aber umso besser, je kleiner der Realteil von s ist. Daher ist Z_+ in der ganzen s-Ebene konvergent. Man zeigt unmittelbar (durch Betrachtung des Differenzenquotienten), daß $Z_+(s,\Phi)$ eine differenzierbare Funktion von s ist. Also ist $Z_+(s,\Phi)$ eine ganze Funktion von s.

Die (im allgemeinen vorhandene) Singularität von $Z(s,\Phi)$ steckt also in Z_-:

Sei D_A^1 die Untergruppe aller $x \in D_A^*$ mit $|Nx| = 1$ (Idelbetrag). Vermöge

$$(t, y) \to (\sqrt{t}y_\infty, \ldots.., y_p, \ldots..)$$

identifizieren wir $\mathbb{R}_{>0}^* \times D_A^1$ mit D_A^* . und normieren das Haarsche Maß auf D_A^1 so, daß

$$\int_{D_A^*} f(x) d_A^* x = \int_0^\infty \left(\int_{D_A^1} f(ty) d_A^1 y \right) \frac{dt}{t}$$

Damit wird

$$\begin{aligned} Z_-(s, \Phi) &= \int_0^\infty \left(\int_{D_A^1} \lambda_-(ty) |N(ty)|^s \Phi(ty) d_A^1 y \right) \frac{dt}{t} \\ &= \int_0^\infty \lambda_-(t) t^s \int_{D_A^1} \Phi(ty) d_A^1 y \, \frac{dt}{t} \\ &= \int_0^1 t^s \int_{D_\mathbb{Q}^* \backslash D_A^1} \left(\sum_{\xi \in D_\mathbb{Q}^*} \Phi(t\xi y) d_A^1 \dot{y} \right) \frac{dt}{t} \end{aligned}$$

(vgl Kapitel 7). Mit dem am Ende von Kapitel 15 beschriebenen Charakter von D_A und der Identifizierung von D_A mit seiner Charaktergruppe ist die Fouriertransformierte von $\Psi(z) := \Phi(tzy)$ (vgl. Kapitel 16)

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}(w) &= \int_{D_A} \Phi(tzy) \chi(sp(zw)) dz = \int_{D_A} t^{-2} \Phi(z) \chi(sp(t^{-1} z y^{-1} w)) dz \\ &= \int_{D_A} t^{-2} \Phi(z) \chi(sp(z y^{-1} w t^{-1}) dz = t^{-2} \hat{\Phi}(y^{-1} w t^{-1}) \end{aligned}$$

Nach der Poisson'schen Summenformel (Kapitel 16) folgt

$$\begin{aligned} \sum_{\xi \in D_\mathbb{Q}^*} \Phi(t\xi y) &= -\Phi(0) + \sum_{\xi \in D_\mathbb{Q}} \Phi(t\xi y) \text{ weil } D_\mathbb{Q} \text{ nullteilerfrei} \\ &= -\Phi(0) + \sum_{\xi \in D_\mathbb{Q}} t^{-2} \hat{\Phi}(y^{-1} \xi t^{-1}) \end{aligned}$$

Setzt man dies ein, so erhält man

$$Z_-(s, \Phi) = \int_0^1 t^s \left\{ \int_{D_\mathbb{Q}^* \backslash D_A^1} [-\Phi(0) + t^{-2} \hat{\Phi}(0) + \sum_{\xi \in D_\mathbb{Q}^*} t^{-2} \hat{\Phi}((\xi^{-1} y)^{-1} t^{-1}] \, d_A^1 \dot{y} \right\} \frac{dt}{t}$$

Wir benutzen ein zweites Mal, daß $D_\mathbb{Q}$ nullteilerfrei ist, also N über $\mathbb{Q}$ nicht die 0 darstellt. In Kapitel 4 haben wir gesehen, daß für die spezielle orthogonale Gruppe G eines anisotropen Raumes der homogene Raum $G_A / G_\mathbb{Q}$ kompakt ist. Mit einem ganz ähnlichen Schluß sieht man hier, daß $D_\mathbb{Q}^* \backslash D_A^1$ kompakt ist. Zur Bequemlichkeit des Lesers sei diese Modifikation hier kurz ausgeführt (für die Kompaktheit ist es natürlich unerheblich, ob die diskrete Untergruppe links oder rechts ausdividiert wird):

Satz 21. *Wenn $D_{\mathbb{Q}}$ nullteilerfrei ist, dann ist der homogene Raum $D_{\mathbb{Q}}^*\backslash D_A^1$ kompakt.*

Beweis: Man nimmt ein Kompaktum C in der additiven Gruppe D_A, dessen Volumen echt größer ist als das Volumen von $D_{\mathbb{Q}}\backslash D_A$ (also > 1 nach der Normierung des Maßes auf D_A). Ist nun $a \in D_A^1$, so ist nach der Integraltransformationsformel $vol\,(aC) = vol\,(Ca^{-1}) = vol\,(C) > 1$. Folglich sind die Translate $\xi + aC,\ \xi \in D_{\mathbb{Q}}$ nicht disjunkt: es gibt $\xi \neq \eta$ in $D_{\mathbb{Q}}$ und $c_1, c_2 \in C$ mit $\xi + ac_1 = \eta + ac_2$, d.h. $0 \neq \xi - \eta = a(c_2 - c_1)$, das heißt wir haben (Bezeichnungswechsel) ein Element ξ mit

$$0 \neq \xi \in D_{\mathbb{Q}} \cap aC' \quad \text{und genauso } 0 \neq \eta \in D_{\mathbb{Q}} \cap C'a^{-1}$$

und dabei ist $C' := C - C$ kompakt. Da $D_{\mathbb{Q}}$ nullteilerfrei ist, folgt

$$0 \neq \eta\xi \in C' \cdot C' \cap D_{\mathbb{Q}}$$

und $C'C'$ ist ebenfalls kompakt in D_A. Daher ist $C'C' \cap D_{\mathbb{Q}}$ endlich, und $\eta\xi$ gehört einem endlichen Wertevorrat an: $\eta\xi \in \{\zeta_1, ..., \zeta_h\}$, alle $\zeta_i \neq 0$. Ist $\eta\xi = \zeta_i$, so haben wir

$$\eta a \in C' \text{ und } (\eta a)^{-1} = a^{-1}\eta^{-1} = a^{-1}\xi\zeta_i^{-1} \in C'\zeta_i^{-1}$$

Setzt man $\cup_{i=1}^h C'\zeta_i^{-1} = E$, so ist E kompakt, und wir haben gezeigt: Zu $a \in D_A^1$ gibt es $\eta \in D_{\mathbb{Q}}^*$ so, daß

$$(\eta a, (\eta a)^{-1}) \in C' \times E$$

Die Menge

$$F = \{b \in D_A^* \mid (b, b^{-1}) \in C' \times E\}$$

ist kompakt in der multiplikativen Gruppe D_A^*, und $D_A^1 \subset D_{\mathbb{Q}}^* \cdot F$.

Wir fahren fort in der Behandlung von Z_-: Der homogene Raum $D_{\mathbb{Q}}^*\backslash D_A^1$ hat nun sicher endliches Volumen, etwa $= \mu$, und damit wird

$$(3) \qquad Z_-(s, \Phi) = [\frac{-\Phi(0)}{s} + \frac{\hat{\Phi}(0)}{s-2}] \cdot \mu + \int_0^1 t^{s-2} \int_{D_{\mathbb{Q}}^*\backslash D_A^1} \sum_{\xi \in D_{\mathbb{Q}}^*} \hat{\Phi}((\xi^{-1}y)^{-1}t^{-1}) d^1\dot{y}\ \frac{dt}{t}$$

Nach Kapitel 7 ist

$$\int_{D_A^1} \hat{\Phi}(y^{-1}t^{-1}) d_A^1 y = \int_{D_{\mathbb{Q}}^*\backslash D_A^1} \sum_{\xi \in D_{\mathbb{Q}}^*} \hat{\Phi}((\xi y)^{-1}t^{-1}) d^1\dot{y}$$

Daher ist das Integral in (3) (es ist egal, ob man über ξ^{-1} oder ξ summiert) gleich

$$\int_0^1 t^{s-2} \int_{D_A^1} \hat{\Phi}(y^{-1}t^{-1}) d_A^1 y\ \frac{dt}{t}$$

Weil $d_A^1 y$ und $\frac{dt}{t}$ invers-invariant sind, ist dies gleich

$$\int_1^\infty t^{2-s} \int_{D_A^1} \hat{\Phi}(yt) d_A^1 y\ \frac{dt}{t}$$

und, weil $yt = ty$, gleich

$$\int_0^\infty \lambda_+(x)|Nx|^{2-s} \hat{\Phi}(x) d_A^* x = Z_+(2-s, \hat{\Phi})$$

Damit haben wir bewiesen

Satz 22.
$$Z(s,\Phi) = [-\frac{\Phi(0)}{s} + \frac{\hat{\Phi}(0)}{s-2}]\cdot\mu + Z_+(s,\Phi) + Z_+(2-s,\hat{\Phi}))$$
und $Z_+(s,\Phi)$ *ist eine ganze Funktion von* s *.*

Man kann aus diesem Satz das Residuum von $Z(s,\Phi)$ an der Stelle $s = 2$ ablesen, nämlich
$$\lim_{s\to 2}(s-2)Z(s,\phi) = \hat{\Phi}(0)\cdot\mu$$

Vergleich mit dem Ergebnis (1) der "multiplikativen Rechnung" zeigt $\mu = 1$, oder noch einmal ausführlich formuliert

Satz 23. *Für das oben definierte Maß auf* D^1_A *hat der homogene Raum* $D^*_{\mathbb{Q}}\backslash D^1_A$ *das Volumen 1.*

Wir wollen Satz 23 benutzen, um die Verankerung bei $n = 3$ für die Berechnung der Tamagawa-Zahl der orthogonalen Gruppen zu machen. Das genügt für die orthogonalen Gruppen in Dimension ≥ 3 , wenn man sich auf Formen beschränkt, die anisotrop über $\mathbb{Q}$ sind. Wenn man beliebige Formen betrachtet, muß man in zwei aufeinander folgenden Dimensionen verankern, also etwa 3 und 4. Warum, werden wir in Kapitel 18 genauer sehen.

Sei Z das Zentrum der Quaternionenalgebra D , bestehend aus den Vielfachen von e_0 . Dann ist $G := D^*/Z^*$ die spezielle orthogonale Gruppe des dreidimensionalen Raumes $V =< -a, -b, ab >$. Die Projektion
$$\pi : D^* \to G, \quad \text{gegeben durch } \pi(x)\, v = xvx^{-1}$$
mit Kern Z^* besitzt lokale Schnitte, so daß sie auch für die Adelgruppen surjektiv ist : $G_A \simeq D^*_A/Z^*_A$. Die Gruppe Z^*_A ist die Idelgruppe I von $\mathbb{Q}$.

Wir wissen (Kapitel 8), daß es auf G eine invariante Differentialform $\omega \neq 0$ höchsten (also dritten) Grades gibt. Dann ist $\psi(x) = \omega(\pi x)$ eine invariante Form dritten Grades auf D^* . Die Form ersten Grades $\frac{1}{2}\frac{d(Nx)}{Nx}$ ist invariant auf D^* . Dann ist auch $\frac{1}{2}\frac{d(Nx)}{Nx}\wedge\psi(x)$ invariant auf D^* (und $\neq 0$). Weil es bis auf rationale Vielfache nur eine über $\mathbb{Q}$ definierte invariante Form höchsten Grades gibt, ist
$$\frac{1}{2}\frac{d(Nx)}{Nx}\wedge\omega(\pi x) = \gamma\cdot\frac{dx_0\wedge .....\wedge dx_3}{(Nx)^2}$$
mit einer rationalen Konstanten γ . Für die lokalen aus diesen Differentialformen abgeleiteten Maße bedeutet das
$$|\gamma|_p\int_{D^*_p} f(x)\frac{(dx_0....dx_3)_p}{|Nx|^2_p} = \int_{D^*_p} f(x)\cdot\frac{(d(Nx))_p}{|2Nx|_p}\,\psi(x)_p$$
Nach Kapitel 7 ist dies gleich
$$\int_{G_p}(\int_{Z^*_p} f(zx)\cdot\frac{dN(zx)_p}{|2N(zx)|_p})\,\omega_p(\pi x)$$

Bei festem x gilt

$$\frac{dN(zx)}{N(zx)} = \frac{d(z^2Nx)}{z^2Nx} = 2\frac{dz}{z}$$

Es folgt

$$|\gamma|_p \int_{D_p^*} f(x)\frac{(dx_0....dx_3)_p}{|Nx|_p^2} = \int_{G_p} (\int_{Z_p^*} f(zx)\frac{dz_p}{|z|_p})\ \omega_p(\pi x) \tag{4}$$

In jedem der drei Integrale geht das Volumenelement aus einer über $\mathbb{Q}$ definierten Differentialform hervor. Bei dem Integral über G_p handelt es sich also um die p-Komponente des Tamagawa-Maßes (siehe Kapitel 11). Für die beiden anderen konvergiert leider das Produkt der Integrale über $Z^*_{\mathfrak{o}_p} = \mathfrak{o}_p^*$ bzw. über $D^*_{\mathfrak{o}_p}$ nicht, nämlich:

Für fast alle p ist $D_{\mathfrak{o}_p} \simeq M_2(\mathfrak{o}_p)$ und das Integral hat den Wert $(p^2-1)(p^2-p)\cdot p^{-4} = (1-p^{-2})(1-p^{-1})$, und das Integral über $\mathfrak{o}_p^*$ ist $= 1-p^{-1}$. Wir multiplizieren beide Seiten von (4) mit $\lambda_p := (1-\frac{1}{p})^{-1}$ und benutzen die mit den Konvergenzfaktoren λ_p versehenen Maße d_A^*x auf D_A^* bzw. d_I^*z auf $Z_A^* = I$. Bei der Produktbildung heben sich die Faktoren $|\gamma|_p$ weg wegen der Produkformel (es war $\gamma \in \mathbb{Q}$)

In dem Diagramm

$$\begin{tikzcd}
& D_A^* \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
D_{\mathbb{Q}}^* \arrow[dr, dash] & & Z_A^* \arrow[dl, dash] \\
& Z_{\mathbb{Q}}^* \arrow[d, dash] & \\
& 1 &
\end{tikzcd}$$

integrieren wir zunächst links herum:

$$\int_{D_A^*} f(x) d_A^*x = \int_{D_{\mathbb{Q}}^*\backslash D_A^*} \sum_{\xi\in D_{\mathbb{Q}}^*} f(\xi x)\ d_A^*\dot{x}$$

und dann rechts

$$\int_{D_A^*} f(x) d_A^*x = \int_{D_A^*/Z_A^*} (\int_{Z_A^*} f(xz) d_I^*z)\omega_A(\pi x)$$

$$= \int_{G_A} (\int_I f(xz) d_I^*z)\omega_A(\pi x)$$

Also haben wir

$$\int_{D_{\mathbb{Q}}^*\backslash D_A^*} \sum_{\xi\in D_{\mathbb{Q}}^*} f(\xi x) d_A^*\dot{x} = \int_{G_A} (\int_I f(xz)\ d_I^*z)\ \omega_A(\pi x)$$

Die obigen Vorbetrachtungen dienten dazu, einzusehen, daß diese Formel nicht nur wie in Kapitel 7 mit irgendwelchen geeignet normierten Maßen gilt, sondern mit dem Tamagawa-Maß von G und den modifizierten Tamagawa-Maßen von D^* und Z .

Das Integral über G_A behandeln wir weiter, indem wir zuerst über die Untergruppe $G_\mathbb{Q}$ summieren. Der Integrand ist $\int_I f(xz) d_I^* z =: F(\pi x)$. Wir erhalten

$$\int_{G_A/G_\mathbb{Q}} \sum_{\gamma \in G_\mathbb{Q}} F(\pi x \cdot \gamma) \omega_A$$

Die Summanden sind alle von der Form $F(\pi x \cdot \gamma) = F(\pi(x\xi))$, denn jedes γ ist ein $\pi(\xi)$. Um jeden Summanden genau einmal zu erhalten, muß man ξ modulo $Z_\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q}^*$ laufen lassen. Dadurch erhält man

$$\int_{G_A/G_\mathbb{Q}} \sum_{\xi \in D_\mathbb{Q}^*/\mathbb{Q}^*} \int_I f(x\xi z) d_I^* z \ \omega_A(\pi x)$$

Im Integral über I summieren wir wieder zuerst über $\zeta \in \mathbb{Q}^*$ und erhalten

(5) $$\int_{G_A/G_\mathbb{Q}} \sum_{\xi \in D_\mathbb{Q}^*/\mathbb{Q}^*} \int_{I/\mathbb{Q}^*} \sum_{\zeta \in \mathbb{Q}^*} f(x\xi z\zeta) d_I^* \dot{z} \ \omega_A(\pi x)$$

Wir möchten $\sum$ und $\int$ vertauschen. Dazu betrachten wir die Funktion $H(x,\xi,z) := \sum_{\zeta \in \mathbb{Q}^*} f(x\xi\zeta z)$. Die Funktion f habe kompakten Träger $C \subset D_A^*$, und $\dot{z}$ laufe in einem Kompaktun $E_0 \subset I/\mathbb{Q}^*$, also, wenn $E \subset I$ ein partielles kompaktes Urbild (siehe Kapitel 4) von E_0 ist, $z \in E\mathbb{Q}^*$. Dann

$$H(x,\xi,z) \neq 0 \Rightarrow \text{es gibt } \zeta \in \mathbb{Q}^* \text{ mit } f(x\xi\zeta z) \neq 0 \Rightarrow \text{ es gibt } \zeta \in \mathbb{Q}^* \text{ mit } x\xi z\zeta \in C$$

$$\Rightarrow x\xi z \in C\mathbb{Q}^* \Rightarrow \xi \in x^{-1} C E^{-1} \mathbb{Q}^* \Rightarrow \gamma = \pi\xi \in \pi(x^{-1} C E^{-1})$$

Da die letzte Menge kompakt und $\gamma = \pi(\xi)$ in der diskreten Untergruppe $G_\mathbb{Q}$ liegt, ist $\sum_{\xi \bmod \mathbb{Q}^*} H(x,\xi,z)$ in jedem $\dot{z}$-Kompaktum eine endliche Summe, und wir können sie gliedweise integrieren. Dies rückwärts gelesen und in (5) eingesetzt ergibt für das gesamte Integral den Wert

$$\int_{G_A/G_\mathbb{Q}} \int_{I/\mathbb{Q}^*} \sum_{\gamma \in G_\mathbb{Q}} \sum_{\zeta \in \mathbb{Q}^*} f(x\xi\zeta z) d_I^* \dot{z} \ \ \omega_A(\pi x) \quad (\gamma = \pi\xi)$$

$$= \int_{G_A/G_\mathbb{Q}} \int_{I/\mathbb{Q}^*} \sum_{\xi \in D_\mathbb{Q}^*} f(x\xi z) d_I^* \dot{z} \ \ \omega_A(\pi x)$$

Integrieren wir in dem Diagramm links herum, so erhalten wir ein Integral über den homogenen Raum $D_A^*/D_\mathbb{Q}^*$, und das ergibt die Gleichung

$$\int_{D_A^*/D_\mathbb{Q}^*} \sum_{\xi \in D_\mathbb{Q}^*} f(x\xi) d_A^*(\dot{x}) = \int_{G_A/G_\mathbb{Q}} \int_{I/\mathbb{Q}^*} \sum_{\xi \in D_{\mathbb{Q}^*}} f(x\xi z) d_I^*(\dot{z}) \omega_A(\pi\dot{x})$$

Wie in Kapitel 7 gesehen, läßt sich jede stetige Funktion mit kompaktem Träger auf $D_A^*/D_{\mathbb{Q}}^*$ als eine Summe $\sum_{\xi \in D_{\mathbb{Q}}^*} f(x\xi)$ schreiben, wobei f kompakten Träger in D_A^* hat. Daher gilt

$$\int_{D_A^*/D_{\mathbb{Q}}^*} f(x) d_A^*(\dot{x}) = \int_{G_A/G_{\mathbb{Q}}} \int_{I/\mathbb{Q}^*} f(xz) d_I^*(\dot{z}) \omega_A(\pi x)$$

für jede stetige Fumktion mit kompaktem Träger in $D_A^*/D_{\mathbb{Q}}^*$. Hat die Funktion F einer positiven reellen Variablen kompakten Träger $\subset (0,\infty)$, so folgt aus Satz 21, daß $f(\dot{x}) := F(|Nx|)$ kompakten Träger in $D_A^*/D_{\mathbb{Q}}^*$ hat. Für jede solche Funktion F gilt also

$$\int_{D_A^*/D_{\mathbb{Q}}^*} F(|Nx|) d_A^*(\dot{x}) = \int_{G_A/G_{\mathbb{Q}}} \int_{I/\mathbb{Q}^*} F(|z|^2 |Nx|) d_I^* z \, \omega_A$$

Wir werten beide Seiten aus:

Linke Seite: Wir benutzen wieder die Isomorphie

$$D_A^* \simeq \mathbb{R}_{>0}^* \times D_A^1 \ \text{ mit } d_A^* x = \frac{dt}{t} \times d_A^1 x$$

Sie liefert für die linke Seite

$$\int_0^\infty \int_{D_A^1/D_{\mathbb{Q}}^*} F(t) d_A^1 \dot{x} \ \frac{dt}{t} = vol(D_A^1/D_{\mathbb{Q}}^*) \cdot \int_0^\infty F(t) \ \frac{dt}{t}$$

Nach Satz 23 ist dies gleich

$$\int_0^\infty F(t) \frac{dt}{t}$$

Rechte Seite: $(0,\infty) \times \prod \mathfrak{o}_p^*$ ist ein Fundamentalbereich für I modulo $\mathbb{Q}^*$. Daher ist, weil $\prod_p \lambda_p \int_{\mathfrak{o}_p^*} \frac{dx}{|x|_p} = 1$,

$$\begin{aligned}\int_{I/\mathbb{Q}^*} F(|z|^2|Nx|) d_I^* z &= \int_0^\infty F(t^2|Nx|) \frac{dt}{t} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty F(t\,|Nx|) \frac{dt}{t} \quad \text{weil } \frac{dt^2}{t^2} = 2\frac{dt}{t} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty F(t) \ \frac{dt}{t} \quad \text{weil } \frac{dt}{t} \text{ invariant}\end{aligned}$$

Vergleicht man rechte und linke Seite, so sieht man

Satz 24.

$$\int_{G_A/G_{\mathbb{Q}}} \omega_A = 2$$

Bemerkung: Wir haben $\int_{G_A/G_{\mathbb{Q}}} \omega_A = 2$ bewiesen für anisotrope Formen vom Typ $< -a, -b, ab >$. Aber jede Form ist Vielfaches einer solchen:
$< a_1, a_2, a_3 > = \frac{a_1 a_2}{a_3} \ \cdot < \frac{a_3}{a_2}, \frac{a_3}{a_1}, \frac{a_3^2}{a_1 a_2} >$.