16. Fouriertransformation

Allgemein: Ist G eine lokal kompakte abelsche Gruppe und $\hat{G}$ ihre Charaktergruppe, so definiert man für jede absolut integrierbare Funktion auf G die Fouriertransformierte $\hat{f}$ durch

$$\hat{f}(\chi) = \int_G f(x)\chi(x)dx$$

$\hat{f}$ ist eine stetige Funktion auf $\hat{G}$. Wir betrachten die für uns wichtigen Beispiele:

1. V_p Sei M_p ein Gitter in V_p und f eine lokal konstante Funktion mit kompaktem Träger auf V_p. Zu einer solchen f gibt es m mit $f(x) = 0$ außerhalb $p^{-m}M_p$. Für jedes $a \in p^{-m}M_p$ gibt es $k = k(a)$ mit $f(x) = f(a)$ falls $x \equiv a \bmod p^{k(a)}$. Aus der Überdeckung

$$p^{-m}M_p = \bigcup_{a\in p^{-m}M_p} (a + p^{k(a)}M_p)$$

kann man eine endliche auswählen:

$$p^{-m}M_p = \cup_{i=1}^N (a_i + p^{k(a_i)}M_p)$$

Die Zahl $k = max\ _i k_i$ hat die Eigenschaft

$$x, y \in p^{-m}M_p,\ x \equiv y \bmod p^k M_p \Longrightarrow f(x) = f(y)$$

f ist also auf den Restklassen $a + p^k M_p$ konstant,

$$f = \sum_a f(a)\mathbf{1}_{a+p^kM_p}$$

ist eine endliche Linearkombination von Indikatorfunktionen $\mathbf{1}_{a+p^kM_p}$. Berechnen wir von solchen f die Fouriertransformierte:

$$\hat{f}(y) = \int_{a+p^kM_p} < x, y > dx = \int_{p^kM_p} < a + x, y > dx =$$

$$< a, y > \cdot \begin{cases} vol(p^kM_p) & \text{wenn } y \in (p^kM_p)^\perp \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$=< a, y > vol(p^kM_p)\mathbf{1}_{(p^kM_p)^\perp}$$

Da $< a, y >$ bei festem a eine lokal konstante Funktion von y ist, zeigt dies: Die Fouriertransformierte ist wieder lokal konstant. Ihre Fouriertransformierte ist

$$\hat{\hat{f}}(z) = \int_{y\in(p^kM_p)^\perp} < a, y > vol(p^kM_p) < y, z > dy = vol(M_p)vol(M_p^\perp)\mathbf{1}_{p^kM_p}(a + z)$$

weil $M_p^{\perp\perp} = M_p$ und $(p^kM_p)^\perp = p^{-k}M_p^\perp$. Dies zeigt:
Für jede lokal konstante Funktion f mit kompaktem Träger ist

$$\hat{\hat{f}}(x) = \gamma_p f(-x)$$

Dabei ist $\gamma_p = vol(M_p) \cdot vol(M_p^\perp)$ eine nur von p (und der Identifizierung von V_p mit seiner Charaktergruppe, aber nicht von M_p) abhängige Konstante.

2. $V_{\mathbb{R}}$. Wir betrachten Funktionen des Typs *Polynom mal* $e^{-pos\, def\, quadratische\, Form}$. Ist $A = A'$ positiv definit, so ist

$$\int e^{-\pi x' A x + 2\pi i x' y} dx = const \cdot e^{-\pi\, y' A^{-1} y}$$

und mit A ist auch A^{-1} positiv definit. Hieraus und (zum Beispiel) aus den Formeln in [E], Seite 86 sieht man: Mit f ist auch die Fouriertransformierte $\hat{f}$ vom beschriebenen Typ.

3. V_A .

Definition: Eine Funktion Φ auf V_A heißt Standardfunktion, wenn
1. $\Phi(x) = \prod_v \Phi_v(x_v)$ $\qquad (\ x = (x_\infty, ..., x_p, ...) \ )$
2. Φ_∞ ist vom Typ Polynom mal $e^{-pos\, def\, quadratische\, Form}$ und alle ϕ_p sind lokal konstant mit kompaktem Träger
3. Für fast alle p ist Φ_p die Indikatorfunktion von M_p , wobei M ein fest vorgegebenes $\mathbb{Z}$-Gitter in $V_{\mathbb{Q}}$ ist.

Für eine Standardfunktion Φ ist

$$\hat{\Phi}(y) = \int_{V_A} \Phi(x) < x, y > dx =$$

$$\lim_S \prod_{v \in S} \int_{V_v} \Phi_v(x_v) < x_v, y_v > \ dx_v \cdot \prod_{p \notin S} \int_{V_p} \Phi_p(x_p) < x_p, y_p > dx_p$$

Für fast alle p ist Φ_p die Indikatorfunktion von M_p und $M_p = M_p^\perp$ und $vol(M_p) = 1$. Für alle S^* , die die Ausnahmestellen enthalten, ist

$$\hat{\Phi}(y) = \prod_{v \in S^*} \hat{\Phi}_v(y_v) \ \cdot \ \prod_{p \notin S^*} \mathbf{1}_{M_p}(y_p)$$

Das zeigt, daß $\hat{\Phi}$ wieder eine Standardfunktion ist.

Satz 19. *Für jede Standardfunktion* Φ *ist* $\sum_{\xi \in V_{\mathbb{Q}}} \Phi(x + \xi)$ *absolut konvergent, und zwar gleichmäßig in* x *auf jedem Kompaktum* $C \subset V_A$.

Beweis: Sei $C = C_\infty \times \prod_{p \in T} C_p \times \prod_{p \notin T} M_p$ und $x \in C$.

$$\Phi(x + \xi) \neq 0 \Rightarrow \Phi_p(x_p + \xi) \neq 0 \text{ für alle } p \Rightarrow \xi \in -C_p + Tr(\phi_p) \text{ für alle } p$$

$D_p := -C_p + Tr(\Phi_p)$ ist kompakt für alle p und $= M_p$ für fast alle p . Daher liegen die $\xi \in V_{\mathbb{Q}}$ mit $\Phi(\xi) \neq 0$ in einem Gitter $L \subset V_{\mathbb{Q}}$. Alle Φ_p sind beschränkt und fast alle gleich 1 auf M_p . Daher ist

$$\sum_{\xi \in V_{\mathbb{Q}}} |\Phi(x + \xi)| \leq const \cdot \sum_{\xi \in L} |\Phi_\infty(\xi)|$$

wobei die Konstante (außer von Φ) nur von dem Kompaktum C abhängt. Nach Definition von Standardfunktion ist die letzte Reihe konvergent.

$F(x) := \sum_{\xi \in V_{\mathbb{Q}}} \Phi(x+\xi)$ ist wegen der gleichmäßigen Konvergenz eine stetige Funktion auf $V_A/V_{\mathbb{Q}}$. Die Charaktergruppe von $V_A/V_{\mathbb{Q}}$ ist $\mathbb{Q}^{\perp} \subset V_A$. Die Fourierkoeffizienten von F sind

$$c(\eta) = \int_{V_A/V_{\mathbb{Q}}} F(x) < x, \eta > dx = \int_{V_A/V_{\mathbb{Q}}} \sum_{\xi \in V_{\mathbb{Q}}} \Phi(x+\xi) < x, \eta > dx =$$

$$\int_{V_A/V_{\mathbb{Q}}} \sum_{\xi \in V_{\mathbb{Q}}} \Phi(x+\xi) < x+\xi, \eta > \text{ weil } < \xi, \eta >= 1$$

$$= \int_{V_A} \Phi(x) < x, \eta > dx = \hat{\Phi}(\eta)$$

(vergleiche das Kapitel über Integration auf homogenen Räumen). $\hat{\Phi}$ ist wie gesehen wieder eine Standardfunktion, daher ist $\sum_{\eta \in V_{\mathbb{Q}}} |c(\eta)|$ konvergent, und damit ist die $\sum_{\eta \in V_{\mathbb{Q}}} c(\eta) < x, \eta >$ absolut konvergent. Nun besagt ein allgemeiner Satz aus der Theorie der Fouriertransformation: Wenn f und $\hat{f}$ beide absolut integrierbar sind und f stetig, dann gilt bei geeigneter Normierung der Haarschen Maße die Umkehrformel. Wenn zum Beispiel die Gruppe G kompakt ist, dann ist ihre Charaktergruppe $\hat{G}$ diskret, und die Maße sind richtig normiert, wenn die ganze Gruppe G das Volumen 1 bekommt und in $\hat{G}$ jeder Punkt die Masse 1. Hier ist $G = V_A/V_{\mathbb{Q}}$ mit dem Volumen 1, und das Integral über $\hat{G} \simeq V_{\mathbb{Q}}$ ist die $\sum_{\eta \in V_{\mathbb{Q}}}$. Das bedeutet jetzt: Die Funktion F auf $V_A/V_{\mathbb{Q}}$ wird durch ihre Fourierreihe dargestellt:

$$\sum_{\xi \in V_{\mathbb{Q}}} \Phi(x+\xi) = \sum_{\eta \in V_{\mathbb{Q}}} \hat{\Phi}(\eta) < x, \eta >$$

An der Stelle $x = 0$ ist das die Poisson'sche Summenformel.