13. Die Minkowski-Siegel'sche Formel

In diesem Kapitel sei der Vektorraum V mit seiner quadratischen Form positiv definit (das heißt $(x,x) > 0$ für alle $x \in V_\infty$). Wie vorher bezeichne G die spezielle orthogonale Gruppe von V . Ihre Adelgruppe G_A operiert auf der Menge der Gitter in V , nämlich: Ist M ein Gitter in V und $\Phi = (\Phi_v)_v \in G_A$, so ist nach Definition der Adelgruppe $\Phi_p M_p = M_p$ für fast alle p . Nach Kapitel 2, Satz 1 gibt es genau ein Gitter L mit $L_p = \Phi_p M_p$ für alle p . Dieses Gitter L wird mit ΦM bezeichnet.

Definition 1. Zwei Gitter M und N gehören zum selben engeren Geschlecht, wenn es $\Phi \in G_A$ gibt mit $N = \Phi M$.

Definition 2. Zwei Gitter gehören zur selben engeren Klasse, wenn es $\sigma \in G_\mathbb{Q}$ gibt mit $N = \sigma M$.

Definition 3. Zwei Gitter gehören zur selben Klasse, wenn es eine orthogonale Transformation σ gibt (also nicht notwendig $\det \sigma = 1$) mit $N = \sigma M$.

Bemerkung: Bei Siegel gehören zwei symmetrische Matrizen A und B mit ganzzahligen Einträgen und Determinante $\neq 0$ zum selben Geschlecht, wenn es zu jedem p und m eine ganzzahlige Matrix T gibt mit $T'AT \equiv B \bmod p^m$. Nach Hensel (vgl. Kapitel 11) gibt es dann zu jedem p eine Matrix $T \in GL(n, \mathfrak{o}_p)$ mit $T'AT = B$. Sind nun M und N zwei Gitter mit Basen $u_1, ..., u_n$ bzw. $v_1, ..., v_n$ über $\mathbb{Z}$ und A und B deren Gram-Matrizen ($a_{ij} = (u_i, u_j)$) und ist Φ_p eine Isometrie von M_p auf N_p , so bilden die $\Phi_p u_i$ eine Basis von N_p , gehen also aus $v_1, ..., v_n$ durch eine p-ganze und p-ganz invertierbare Matrix T auseinander hervor, und es ist

$$B = \text{ Gram } (v_1, ..., v_n) = T' \text{ Gram } (\Phi_p u_1, ..., \Phi_p u_n) T = T' Gram(u_1, ..., u_n) T = T'AT$$

Umgekehrt liefert jedes solche T ein Isometrie von M_p auf N_p .
Wir sahen in Kapitel 11, daß jedes lokale Gitter M_p eine Spiegelung gestattet. Wenn es also eine Isometrie von M_p auf N_p gibt, dann auch eine mit Determinante 1, das heißt ein Element aus $G_{\mathbb{Q}_p}$: Geschlecht und engeres Geschlecht fallen zusammen. In Definition 1 können wir "engeren" streichen. Nicht jedoch in Definition 2; zum Beispiel im Gitter $\mathbb{Z}e_1 + \mathbb{Z}e_2$ mit der Gram-Matrix $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ sind $\pm e_1$ die einzigen Vektoren x mit $(x,x) = 3$, jede Isometrie muß also e_1 in e_1 oder in $-e_1$ überführen. Die einzige Spiegelung, die e_1 in $-e_1$ überführt, ist die längs e_1 , und die einzige, die e_1 fest läßt, ist die längs $e_1^\perp$. Keine von beiden führt das Gitter in sich über.

Für ein Gitter M bezeichne $G_A(M)$ die Untergruppe aller $\Phi \in G_A$ mit $\phi M = M$.
Behauptung: Die engeren Klassen im Geschlecht des Gitters M entspechen umkehrbar eindeutig den Doppelnebenklassen $G_\mathbb{Q} \backslash G_A / G_A(M)$ in G_A .
Beweis: Das Geschlecht von M besteht aus allen ΦM mit $\Phi \in G_A$. Zwei solche, etwa ΦM und ΨM gehören zur selben engeren Klasse, wenn es $\sigma \in G_\mathbb{Q}$ gibt mit $\Psi M = \sigma \Phi M$. Dies bedeutet, $\Psi^{-1} \sigma \Phi \in G_A(M)$. Also ist $\Phi \in G_\mathbb{Q} \Psi G_A(M)$, und Φ und Ψ bestimmen dieselbe Doppelnebenklasse.

Da V positiv definit ist, ist nach Kapitel 4 der homogene Raum $G_\mathbb{Q} \backslash G_A$ kompakt. Da $G_A(M)$ offen in G_A ist, gibt es nur endlich viele Doppelnebenklassen $G_\mathbb{Q} \backslash G_A / G_A(M)$, also nur endlich viele engere Klassen und erst recht nur endlich viele Klassen. Sei h

die Anzahl der Klassen und h^+ die Anzahl der engeren Klassen im Geschlecht von M. Durch die (disjunkte) Zerlegung

$$G_A = \cup_{i=1}^{h^+} G_{\mathbb{Q}} \Phi_i G_A(M)$$

erhält man

$$\int_{G_{\mathbb{Q}} \backslash G_A} \omega_A = \sum_{i=1}^{h^+} \int_{G_{\mathbb{Q}} \backslash G_{\mathbb{Q}} \Phi_i G_A(M)} \omega_A$$

$$= \sum_{i=1}^{h^+} \int_{G_{\mathbb{Q}} \backslash G_{\mathbb{Q}} \Phi_i G_A(M) \Phi_i^{-1}} \omega_A \text{ wegen der Rechtsinvarianz von } \omega_A$$

$$= \sum_{i=1}^{h^+} \int_{G_{\mathbb{Q}} \backslash G_{\mathbb{Q}} G_A(M_i)} \omega_A \quad \text{mit } M_i = \Phi_i M$$

$$= \sum_{i=1}^{h^+} \int_{G_{\mathbb{Q}} \cap G_A(M_i) \backslash G_A(M_i)} \omega_A \quad (\text{ vgl Kapitel 7 })$$

$G_A(M_i)$ ist eine kompakte Gruppe (weil G_∞ kompakt ist), ihr Durchschnitt mit der diskreten Gruppe $G_{\mathbb{Q}}$ ist endlich. Er besteht aus denjenigen speziellen orthogonalen Transformationen von $V_{\mathbb{Q}}$, die das Gitter M_i in sich transformieren, den sogenannten Einheiten von M_i mit Determinante 1. Ihre Anzahl wird mit $E^+(M_i)$ bezeichnet. Der letzte Ausdruck wird damit

$$= \sum_{1=1}^{h^+} \frac{1}{E^+(M_i)} \int_{G_A(M_i)} \omega_A = \sum_{i=1}^{h^+} \frac{1}{E^+(M_i)} \int_{G_A(M)} \omega_A$$

(letzteres wegen der Rechts- und Linksinvarianz von ω).

Sei $E(M_i)$ die Anzahl aller Einheiten von M_i. Bei Siegel kommt die $\sum_{i=1}^{h} \frac{1}{E(M_i)}$ vor. Zusammenhang mit unserer Summe:

Für die Summanden unterscheiden wir zwei Fälle:

1. M_i gestattet keine orthogonale Transformation mit Determinante -1. Dann zerfällt die Klasse vom M_i in zwei engere Klassen, etwa vertreten durch M_i und M_i', und für beide ist $E = E^+$.
2. M_i gestattet eine orthogonale Transformation mit Determinante -1. Dann ist die Klasse von M_i zugleich die engere Klasse, und $E = 2E^+$.

Das ergibt

$$\sum_{i=1}^{h^+} \frac{1}{E^+(M_i)} = \sum_{ersterFall} \left(\frac{1}{E^+(M_i)} + \frac{1}{E^+(M_i')}\right) + \sum_{zweiterFall} \frac{1}{E^+(M_i)} = \sum_{i=1}^{h} \frac{2}{E(M_i)}$$

Nun haben wir

$$\int_{G_{\mathbb{Q}} \backslash G_A} \omega_A = \sum_{i=1}^{h} \frac{2}{E(M_i)} \int_{G_A(M)} \omega_A \tag{1}$$

Das letzte Integral ist

$$\int_{G_A(M)} \omega_A = \int_{G_\infty} \omega_\infty \cdot \prod_p \int_{G(M_p)} \omega_p$$

Wir setzen die in Kapitel 9 und 12 gefundenen Werte für die lokalen Integrale ein:

$$\int_{G_\infty} \omega_\infty = (\frac{1}{2})^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \cdot (\det A)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \frac{\pi^{\frac{n(n+1)}{4}}}{\prod_{j=1}^n \Gamma(\frac{j}{2})}$$

$$\int_{G(M_p)} = \frac{1}{2} A_m p^{-m\frac{n(n-1)}{2}} \cdot p^{\nu\frac{n(n-3)}{2}} \cdot |\det A|_p^n \text{ für } m \geq 2\delta + 1$$

Die (für $m \geq 2\delta+1$) von m unabhängigen Zahlen $\frac{1}{2} A_m p^{-m\frac{n(n-1)}{2}}$ sind die Siegel'schen α_p .
Man erhält

$$\int_{G_A(M)} \omega_A = \frac{1}{2} (\det A)^{-\frac{n+1}{2}} \cdot \frac{\pi^{\frac{n(n+1)}{4}}}{\prod_{j=1}^n \Gamma(\frac{j}{2})} \cdot \prod_p \alpha_p$$

Zusammen mit (1) haben wir nun

Satz 16.

(2) $$\sum_{i=1}^h \frac{1}{E(M_i)} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{3}{2})......\Gamma(\frac{n}{2}) \cdot (\det A)^{\frac{n+1}{2}}}{\pi^{\frac{n(n+1)}{4}} \cdot \prod_p \alpha_p} \cdot \int_{G_\mathbb{Q} \backslash G_A} \omega_A$$

Die Minkowski-Siegel'sche Formel besagt, daß an Stelle des letzten Integrals der Faktor 2 stehen sollte ([S],Formel (72) auf Seite 568). Die Formel (2) zeigt, daß der Minkowski-Siegel'sche Satz äquivalent ist zur Aussage, daß das Volumen eines Fundamentalbereichs für die Adele nach den Hauptadelen der speziellen orthogonalen Gruppe G gleich 2 ist. Dieses Volumen heißt die Tamagawa-Zahl von G , kurz $\tau(G)$.

Im nächsten Kapitel wollen wir zur Minkowski-Siegel'schen Formel einige Beispiele rechnen. Danach wollen wir $\tau(G) = 2$ beweisen nach [W2], Seite 76-116. Dort werden fünf Typen von klassischen Gruppen gleichzeitig behandelt, wodurch der Beweis natürlich sehr lang und durch Fallunterscheidungen unterbrochen wird. Diese Vorlesung versucht, den Spezialfall der orthogonalen Gruppen möglichst durchsichtig darzustellen. Ganz zum Schluß werden wir uns sogar wieder auf den positiv definiten Fall zurückziehen, obwohl wir die Existenz des Tamagawa-Maßes für Formen von beliebigem Index (und Dimension ≥ 3) eingesehen haben und auch klar sein wird, welche Zusatzbetrachtungen man im allgemeinen Fall anstellen müßte.