9. Das Maß im Reellen

In diesem Kapitel berechnen wir mit Benutzung des im vorigen Kapitel erklärten Maßes das Volumen der speziellen orthogonalen Gruppe im Falle $A = 1$. Wir haben also auszuwerten

$$\int_{Y'=-Y} \frac{dY}{\det(1+Y)^{n-1}}\ , \qquad \text{wobei } dY = dy_{21} \ldots\ldots dy_{n,n-1}$$

Beachte, daß $\det(1+Y)$ stets > 0. Das sieht man an den folgenden Formeln, aber es folgt natürlich auch daraus, daß $\det(1+Y)$ stets $\neq 0$ und der Raum der schiefsymmetrischen Matrizen zusammenhängend ist. Für $n > 2$ entwickeln wir die Determinante nach der ersten Zeile und Spalte: Wir kürzen $\det X$ ab durch $|X|$.

$$\begin{vmatrix} 1 & -y_2 & \ldots & -y_n \\ y_2 & & & \\ \vdots & & 1+Z & \\ y_n & & & \end{vmatrix} = |1+Z| + \sum_{i,j=2}^{n} y_i (1 \tilde{+} Z)_{ij} y_j$$

$$= |1+Z|\{1 + y'(1+Z)^{-1} y\}$$

Dabei ist $(1 \tilde{+} Z)$ die Adjunkte von $1 + Z$.
Setzt man $(1+Z)^{-1} y = z$, so ist ($dy_2 \ldots . dy_n$ abgekürzt $= dy$)

$$dy = |1+Z|\, dz$$

und

$$y'(1+Z)^{-1} y = z'(1-Z)z = z'z$$

weil $z'Zz = 0$. Für $L_n := \int_{Y'=-Y} \frac{dY}{|1+Y|^{n-1}}$ erhalten wir die Rekursionsformel

$$L_n = L_{n-1} \cdot \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{dx}{(1 + x_2^2 + \ldots . + x_n^2)^{n-1}}$$

Lemma 1. *Sei $f(x)$ eine stetige Funktion ≥ 0 auf $\mathbb{R}^n$, die nur von r abhängt ($r^2 = x_1^2 + \ldots . + x_n^2$), also $f(x) = g(r)$, und g sei monoton. Dann ist*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx = n V_n(1) \int_0^\infty g(r) r^{n-1} dr$$

wobei $V_n(r)$ das Volumen der Kugel vom Radius r im $\mathbb{R}^n$ ist.

Beweis: Für $R > 0$ und $0 = r_0 < r_1 < \ldots . < r_N = R$ ist

$$\int_{\sum x_i^2 \leq R^2} f(x)\, dx = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{r_i^2 \leq \sum x_j^2 \leq r_{i+1}^2} f(x)\, dx$$

Nach dem Zwischenwertsatz, angewandt auf g, ist dies mit $\xi_i \in [r_i, r_{i+1}]$

$$= \sum_{i=0}^{N-1} g(\xi_i)(V(r_{i+1}) - V(r_i)) = \sum_{i=0}^{N-1} g(\xi_i)(r_{i+1}^n - r_i^n)\, V(1) =$$

$$\sum_{i=0}^{N-1} g(\xi_i) n \eta_i^{n-1} V(1)(r_{i+1}-r_i)$$

mit $\eta_i \in [r_i, r_{i+1}]$ .. Nach Definition des Riemann-Integrals strebt diese Summe mit wachsender Verfeinerung gegen $nV(1)\int_0^R g(r)r^{n-1}dr$.

Folgerung:

$$L_n = L_{n-1} \cdot (n-1)V_{n-1}(1)\int_0^\infty \frac{r^{n-2}dr}{(1+r^2)^{n-1}}$$

Mit der Substitution $r = \tan x$ wird das Integral zu

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x \cos x)^{n-2} dx = \frac{1}{2^{n-1}} \int_0^\pi (\sin x)^{n-2} dx$$

Für das Integral

$$I_k := \int_0^\pi \sin^k x dx$$

findet man schrittweise durch partielle Integration

$$I_k = \begin{cases} \frac{(k-1)(k-3)......\cdot 2}{k(k-2).....\cdot 3} \cdot 2 & \text{wenn } k \text{ ungerade} \\ \frac{(k-1)(k-3).....\cdot 3\cdot 1}{k(k-2).....\cdot 4\cdot 2} \cdot \pi & \text{wenn } k \text{ gerade} \end{cases}$$

Für ungerades k erweitern wir den Bruch mit seinem Zähler, für gerades k mit seinem Nenner. Dann erhalten wir

$$I_k = \begin{cases} \frac{2^k(\frac{k-1}{2}!)^2}{k!} & \text{wenn } k \text{ ungerade} \\ \frac{k!}{2^k(\frac{k}{2}!)^2}\pi & \text{wenn } k \text{ gerade} \end{cases}$$

Für die Gammafunktion $\Gamma(z) = (z-1)!$ gilt nach Legendre

$$\Gamma(z) = \frac{2^{z-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(\frac{z}{2})\Gamma(\frac{z+1}{2})$$

([FB], Seite 201). Daher wird für ungerades k

$$I_k = \frac{2^k \Gamma(\frac{k+1}{2})^2}{\Gamma(k+1)} = \frac{\Gamma(\frac{k+1}{2})}{\Gamma(\frac{k}{2}+1)}\sqrt{\pi}$$

Für gerades k hat man den Zähler $k! = \Gamma(k+1)$ nach Legendre zu ersetzen und erhält ebenfalls $\frac{\Gamma(\frac{k+1}{2})}{\Gamma(\frac{k}{2}+1}\sqrt{\pi}$.

Jetzt müssen wir das alles zusammensetzen:

$$\frac{L_n}{L_{n-1}} = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{dz}{(1+z_2^2+.....+z_n^2)^{n-1}}$$

$$= (n-1)\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\frac{n-1}{2}!}\int_0^\infty \frac{r^{n-2}}{(1+r^2)^{n-1}} dr$$

$$= (n-1)\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})} \cdot \frac{1}{2^{n-1}} I_{n-2}$$

$$= \frac{1}{2^{n-2}} \cdot \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$$

(unter Ausnutzung von $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$).
Multipliziert man das alles zusammen und beachtet $L_2 = \pi$, so erhält man

$$\int_{G_{\mathbb{R}}} \omega_\infty = L_n = (\frac{1}{2})^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \frac{\pi^{\frac{n(n+1)}{4}}}{\prod_{j=1}^n \Gamma(\frac{j}{2})}$$

wenn $A = 1$.

Ist A positiv definit, so gibt es T mit $A = T'T$. Der Tangentialraum $T_1(G)$ bestand aus allen Y , für die AY schief ist. Setzt man $Z = TYT^{-1}$, so ist Z schief. Man hat

$$Z = \sum_{r>s} z_{rs}(e_{rs} - e_{sr}) = TYT^{-1} = T\sum_{r>s} y_{rs}A^{-1}(e_{rs} - e_{sr})T^{-1} =$$

$$\sum_{r>s} y_{rs}T'^{-1}(e_{rs} - e_{sr})T^{-1}$$

Die Abbildung $X \mapsto T'^{-1}XT^{-1}$ ist eine lineare Transformation Q des Raumes aller schiefsymmetrischen Matrizen auf sich. Ihre Determinante ist eine multiplikative Funktion von T , welche man findet, indem man für T eine Diagonalmatrix einsetzt: $\det Q = (\det T)^{-(n-1)}$. Nach Definition von dY und dZ folgt nun

$$dZ = (\det T)^{-(n-1)} dY = (\det A)^{-\frac{n-1}{2}} dY$$

Jetzt erhalten wir

$$\int_{Y \in T_1(G)_{\mathbb{R}}} \frac{dY_\infty}{|1+Y|_\infty^{n-1}} = |A|^{\frac{n-1}{2}} \int_{Z=-Z'} \frac{dZ_\infty}{|1+Z|_\infty^{n-1}} = |A|^{\frac{n-1}{2}} L_n$$

mit dem oben angegebenen Wert von L_n .