7. Integration auf homogenen Räumen

Dieses Kapitel dient dazu, das Volumen eines Fundamentalbereichs für G_A nach $G_{\mathbb{Q}}$ nach oben abzuschätzen.

Nach Kapitel 6 enthält die Menge $KT_cN_FE \subset G_A$ ein Vertretersystem für G_A modulo $G_{\mathbb{Q}}$. Wir wollen zeigen, daß sie endliches Volumen hat für das Haarsche Maß auf G_A. Zu Existenz und Eigenschaften des Haarschen Maßes siehe zum Beispiel [W1]. Die wichtigste Eigenschaft ist die Invarianz unter Translation in der Gruppe: Ist f_a die um a verschobene Funktion, also $f_a(x) = f(ax)$, so ist

$$\int f_a(x)\ dx = \int f(x)\,dx \quad (\text{ Linksinvarianz })$$

Ein wichtiger Satz ist, daß das Haarsche Maß bis auf einen (positiven reellen) Faktor eindeutig bestimmt ist.

Definition : Eine Gruppe heißt unimodular, wenn das linksinvariante Maß auch rechtsinvariant ist.

Ist G kompakt, so ist die konstante Funktion Eins integrierbar. Sie ist gleich allen ihren Translaten: Jede kompakte Gruppe ist unimodular.

Satz 9. *Die Gruppen* $G_{\mathbb{Q}_v}$ *sind unimodular.*

Beweis: Sei G eine der Gruppen $G_{\mathbb{R}}$, $G_{\mathbb{Q}_p}$. Sei $\int f(x)dx$ linksinvariant. Für festes $a \in G$ ist $f \mapsto \int f(xa)dx$ linksinvariant. Wegen der Eindeutigkeit des Haarschen Maßes ist es proportional zu $\int f(x)dx$, der Proportionalitätsfaktor hängt natürlich von a ab:

$$\int f(xa)dx = \chi(a) \int f(x)dx \text{ für alle } f$$

χ ist ein Homomorphismus von G in die multiplikative Gruppe der positiven reellen Zahlen. Auf der Kommutatorgruppe von G muß er gleich 1 sein. Nun beobachten wir:

1. Die spezielle orthogonale Gruppe eines Vektorraumes V über einem beliebigen Körper K der Charakterisik $\neq 2$ wird von Umlegungen erzeugt. (Eine orthogonale Transformation ϕ heißt Umlegung, wenn V eine Zerlegung $V = A \perp B$ besitzt, so daß $\phi = 1$ auf A und $\phi = -1$ auf B und $\dim B = 2$.)
Nämlich: Eine Umlegung ist ein Produkt von zwei Spiegelungen mit zueinander senkrechten Spiegelungsvektoren. Bekanntlich wird die volle orthogonale Gruppe von Spiegelungen erzeugt, die spezielle also von den ST, wenn S und T Spiegelungen sind. Wenn $s^\perp \cap t^\perp$ einen nicht isotropen Vektor r enthält, dann ist $ST = SR \cdot RT$ Produkt von zwei Umlegungen. Ist das nicht der Fall, so ist $s^\perp \cap t^\perp$ total isotrop, also $\subset Ks + Kt$. Das geht nur, wenn $n - 2 \leq 2$, also $n \leq 4$ ist. Aber $n = 4$ scheidet aus, weil dann $s^\perp \cap t^\perp = Ks + Kt$ total isotrop wäre, was nicht geht, weil s nicht isotrop ist. Also ist $n = 3$. Dann sind $-S$ und $-T$ Umlegungen, und $ST = (-S)(-T)$.

2. Ist G eine Gruppe mit lauter involutorischen Erzeugenden, so liegen alle Quadrate in der Kommutatorgruppe G' von G; nämlich:

$$(a_1....a_k)^2 = a_1a_2....a_k. \cdot a_1^{-1}....a_k^{-1} \equiv (a_2....a_k)^2 \bmod G'$$

Nach 1 und 2 liegen alle Quadrate im Kern von χ:

$$1 = \chi(a^2) = \chi(a)^2 \text{ für alle } a \in G$$

Da die Werte von χ positive reelle Zahlen sind, folgt $\chi = 1$.

Als nächstes wollen wir invariante Maße auf gewissen homogenen Räumen konstruieren.

Definition: Ist G eine lokal kompakte Gruppe und K eine abgeschlossene Untergruppe, so heißt

$$\{Kg \mid g \in G\} =: K\backslash G$$

ein homogener Raum von G.

$$\pi : g \mapsto Kg$$

ist eine Abbildung von G auf $K\backslash G$. Auf $K\backslash G$ operiert G transitiv von rechts vermöge $(Kg)g_0 = K(gg_0)$. Der Raum $K\backslash G$ wird topologisiert, indem die offenen Mengen von $K\backslash G$ genau die Bilder $\pi(U)$ der offenen Mengen U von G sind. Damit ist π stetig und offen.

Satz 10. *G sei unimodular und K eine kompakte Untergruppe von G und dx bzw. dk Haarsche Maße auf G bzw. K. Dann gibt es ein unter der Operation von G invariantes Integral dP auf dem homogenen Raum $K\backslash G$ mit*

$$\int_G f(x)dx = \int_{K\backslash G} \{\int_K f(kx)dk\} dP \quad (P = \pi(x))$$

Bis auf einen konstanten Faktor ist dP das einzige rechtsinvariante Integral auf $K\backslash G$.

Beweis: Sei F eine stetige Funktion mit kompaktem Träger C auf $K\backslash G$. Nach Lemma 2, Kapitel 4 gibt es zu C ein partielles kompaktes Urbild $C' \subset G$. Es gibt eine stetige Funktion Φ mit kompaktem Träger auf G mit Werten zwischen 0 und 1, die auf C' immer gleich 1 ist (Urysohn). Dann setzt man

$$f(x) = \begin{cases} \frac{F(Kx)\Phi(x)}{\int_K \Phi(kx)dk} & \text{wenn } \int_K \Phi(kx)dk \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Diese Funktion ist stetig mit kompaktem Träger auf G und so konstruiert, daß

$$\int_K f(kx)dk = F(Kx) \text{ für alle } x \in G \tag{1}$$

(Dabei wird die Rechtsinvarianz von dk ausgenutzt). Wir können f über G integrieren. Wir behaupten, daß das $\int_G f(x)dx$ von der Wahl der Funktion Φ unabhängig ist; nämlich: Wir zeigen, daß alle f, die (1) erfüllen, dasselbe $\int_G f(x)dx$ besitzen. Oder, durch Differenzbildung:

$$\text{wenn } \int_K f(kx)dk = 0 \text{ für alle } x \in G, \text{ dann ist } \int_G f(x)dx = 0$$

Um das zu zeigen, sei h eine beliebige stetige Funktion mit kompaktem Träger auf G Wenn $\int_K f(kx)dk = 0$ für alle $x \in G$, dann ist

$$0 = \int_G h(x^{-1}) \cdot \{\int_K f(kx)dk\} \ dx = \int_G \int_K h(x^{-1}) f(kx)dk\, dx$$

$$= \int_K \int_G h(x^{-1}) f(kx) dx\, dk \text{ nach Fubini}$$

$$= \int_K \int_G h(x^{-1}k) f(x) dx\, dk \text{ weil } dx \text{ auch linksinvariant}$$

(2) $$= \int_G f(x) \ \{\int_K h(x^{-1}k)dk\} \ dx \text{ wieder nach Fubini}$$

Sei C der Träger von f. Dann ist $C^{-1}K$ eine kompakte Teilmenge von G. Es gibt eine stetige Funktion h mit kompaktem Träger, welche auf $C^{-1}K$ überall gleich 1 ist (Urisohn's Lemma) . Für diese gilt

$$f(x) \neq 0 \Rightarrow x \in C \Rightarrow h(x^{-1}k) = 1 \text{ für alle } k \in K \Rightarrow \int_K h(x^{-1}k)dk = \int_K dk = const \neq 0$$

Aus (2) folgt $\int_G f(x)dx = 0$.

Jetzt ist

$$J(F) := \int_G f(x)dx$$

wohldefiniert. Statt $J(F)$ schreibt man auch $\int_{K\backslash G} F(P)dP$. Dann hat man die Formel

(3) $$\int_G f(x)dx = \int_{K\backslash G} \{\int_K f(kx)dk\} \ dP$$

worin gemeint ist, daß $P = Kx$. Offensichtlich ist dP rechtsinvariant unter G. Ist umgekehrt $d\mu(P)$ irgendein rechtsinvariantes Integral auf $K\backslash G$, so definiert die rechte Seite von (3) mit $d\mu(P)$ statt dP ein rechtsinvariantes Integral auf G. Dieses ist bis auf einen Faktor bestimmt. Also ist

$$\int_{K\backslash G} \{\int_K f(kx)dk\} \ d\mu(P) = \rho \int_{K\backslash G} \{\int_K f(kx)dk\} \ dP$$

Da wie gesehen jede stetige Funktion mit kompaktem Träger auf $K\backslash G$ sich als ein Integral über K darstellen läßt, folgt die Eindeutigkeit von dP bis auf einen Faktor.

Zusatz: Daß G unimodular ist, wurde in der letzten Zeile vor (2) ausgenutzt. Genau besehen wurde aber nur benutzt, daß dx invariant unter Linksmultiplikation mit Elementen aus K ist ($d(k^{-1}x) = dx$). Im allgemeinen ist $d(ax) = \Delta(a) \cdot dx$, wo Δ ein stetiger Homomorphismus von G in die positive reelle Achse ist. Und für den Schluß hat es genügt, daß $\Delta(k) = 1$ ist für alle $k \in K$. Das ist aber sicher der Fall, wenn K kompakt ist. Auf die Voraussetzung " G unimodular" kann also bei kompaktem K verzichtet werden. (vgl. [W1], Seite 45).

Zuletzt benötigen wir noch einen Isomorphiesatz, der für abstrakte Gruppen wohlbekannt und sehr leicht zu beweisen ist. Aber es ist nicht ganz trivial zu zeigen, daß er auch topologisch gilt:

Sei G eine lokal kompakte Gruppe, K eine kompakte und B eine abgeschlossene Untergruppe und $G = KB$. Die Abbildung $\bar{f}(b) = Kb$ von B nach $K\backslash G$ ist wegen $G = KB$ surjektiv, und

$$\bar{f}(b_1) = \bar{f}(b_2) \Leftrightarrow b_1 \in (K \cap B)b_2$$

Sie definiert also eine Bijektion

$$f \; : \; (K \cap B)\backslash B \to K\backslash G$$

Satz 11. *f ist stetig und offen.*

Beweis: Wir zeigen, daß eine Folge $(K\cap B)b_n$ in $(K\cap B)\backslash B$ genau dann gegen $(K\cap B)b$ konvergiert, wenn die Bildfolge Kb_n in $K\backslash G$ gegen Kb konvergiert. Indem man um b^{-1} verschiebt, sieht man, daß es genügt, $b = 1$ zu nehmen. Dann bedeutet ersteres:
Zu jeder offenen Einsumgebung U in B gibt es n_0 so, daß

$$(K \cap B)b_n \subset (K \cap B)U, \text{ das heißt } b_n \in (K \cap B)U \text{ für } n > n_0$$

Das zweite bedeutet: Zu jeder offenen Einsumgebung W in G gibt es n_0 , so daß

$$Kb_n \subset KW, \text{ das heißt } b_n \in KW \text{ für } n > n_0$$

Die offenen Mengen von B sind die Durchschnitte der offenen Mengen von G mit B.
Die beiden Aussagen sind daher äquivalent, wenn gilt
1. Zu jedem offenen $W \ni 1$ in G gibt es offenes $U \ni 1$ in G so, daß

$$(K \cap B)(U \cap B) \subset KW$$

und
2. Zu jedem offenen $U \ni 1$ in G gibt es offenes $W \ni 1$ in G so, daß

$$KW \cap B \subset (K \cap B)(U \cap B)$$

Das erste ist trivial (mit $U = W$) . Die zweite Formel ist äquivalent mit

$$KW \cap B \subset (K \cap B)U$$

Ist nun offenes $U \ni 1$ in G gegeben, so wählt man zuerst eine offene Einsumgebung V mit $V^2 \subset U$ und betrachtet dann

$$K' := \{k \in K \mid k \notin (K \cap B)V\}$$

K' ist abgeschlossen in K, also auch kompakt. B ist abgeschlossen in G, sein Komplement also offen in G. Daher gibt es zu $g \notin B$ eine offene Einsumgebung Y mit

$$gY \cap B = \emptyset$$

oE $Y = Y^{-1}$. Dann ist $g \notin BY$. Es gibt eine offene Einsumgebung Y_1 mit $Y_1^2 \subset Y$. Damit ist $g \notin BY_1 \cdot Y_1$ und daher $g \notin \overline{BY_1}$. Das zeigt: Zu $g \notin B$ gibt es eine offene Einsumgebung W so, daß $g \notin \overline{BW}$. Nun sind aber alle $k' \in K'$ nicht in B, und es folgt

$$K' \cap \bigcap_{W\, offen \ni 1} \overline{BW} = \emptyset.$$

Da K' kompakt, ist bereits ein endlicher Durchschnitt leer:

$$K' \cap \bigcap_{i=1}^{N} \overline{BW_i} = \emptyset \quad \text{erst recht } K' \cap \bigcap_{i=1}^{N} BW_i = \emptyset$$

Nach Definition von K' heißt das

$$K \cap \bigcap_{i=1}^{N} BW_i \subset (K \cap B)V$$

Setzt man $W_0 = V \cap \bigcap_{i=1}^{N} W_i$ und $W = W_0 \cap W_0^{-1}$, so ist W eine offene Einsumgebung, und aus $K \cap BW \subset (K \cap B)V$ folgt

$$KW \cap B \subset (K \cap BW)W \subset (K \cap B)VW \subset (K \cap B)V^2 \subset (K \cap B)U$$

Damit ist Satz 11 bewiesen.

Die Sätze 10 und 11 wollen wir benutzen, wenn $G = G_A$ die Adelgruppe der speziellen orthogonalen Gruppe und K die in Kapitel 2 beschriebene kompakte Untergruppe von G_A ist. Die Gleichung $G_A = KB_A$ bleibt erhalten, wenn wir B_A durch $B_A^+ = \{b \in B_A \mid \lambda_{i,\infty}(b_\infty) > 0\}$ ersetzen. In Kapitel 6 sahen wir, daß für genügend großes c die Menge $S_c = KT_cN_FE$ die Eigenschaft $G_A = S_c \cdot G_{\mathbb{Q}}$ besitzt. Wir wollen das Volumen von S_c (für das Haarsche Maß von G_A) nach oben abschätzen. Sei f die Indikatorfunktion von S_c. Im Sinne von Satz 10 ist

$$\int_{G_A} f(g)\, dg = \int_{K \backslash G_A} \Big(\int_K f(kg) dk \Big) d\dot{g}$$

Das innere Integral ist $= \int_K dk$, wenn $g \in S_c$ und $= 0$ sonst. Nun ist $K \backslash G_A = K \backslash KB_A^+ \simeq (K \cap B_A^+) \backslash B_A^+$, und nach Satz 11 ist dieser Isomorphismus stetig und offen. Außerdem ist er mit Multiplikationen von rechts mit Elementen aus B_A^+ vertauschbar. deshalb tranportiert er das rechtsinvariante Maß $d\dot{g}$ von $K \backslash G_A$ in ein rechtsinvariantes Maß auf $(K \cap B_A^+) \backslash B_A^+$. Bis auf einen Faktor gibt es aber nur ein solches, nämlich das von B_A^+ geerbte $d\dot{b}$ (letzte Aussage in Satz 10). Der Integrationsbereich $K \backslash S_c$ geht dabei über in $(K \cap B_A^+) \backslash (K \cap B_A^+) T_c N_F E$. Wendet man wieder Satz 10 an, so erhält man schließlich

$$\int_{G_A} f(g)\, dg = \frac{\int_K dk}{\int_{K \cap B_A^+} dk'} \cdot \int_{B_A^+} \tilde{f}(b)\, db$$

Dabei ist $\tilde{f}$ die Indikatorfunktion von $S_c \cap B_A^+ = (K \cap B_A^+) T_c N_F E$. Wir beschreiben $K \cap B_A^+$ komponentenweise:

1. $K_\infty \cap B_\infty^+ = \{b = (t_1,....,t_r)\phi_{u_1a_1}...\phi_{u_ra_r}q \in K_\infty\}$. Die t_i sind reell > 0 und homomorphe Bilder von $b \in B_\infty$. Wenn b in einer kompakten Untergruppe läuft, sind sie gleich 1. Die a_i laufen in reellen Vektorräumen. Aus den Vertauschungsregeln für die Eichlertransformationen sieht man, daß $b \mapsto a_r$ ein Homomorphismus in die additive Gruppe W_∞^r ist. Auf einer kompakten Untergruppe ist er gleich 0. Danach sieht man dasselbe für a_{r-1} usw. Zum Schluß folgt

$$K_\infty \cap B_\infty^+ = K_\infty \cap G(W)_\infty$$

2. $K_p \cap B_p = G(M_p) \cap B_p \subset G(M_p)$ für alle p.

Die Vertretersysteme F_i für W_A^i nach $W_\mathbb{Q}^i$ kann man in der Form $F_{i\infty} \times \prod_p (W_{\mathbb{Q}_p}^i \cap M_p)$ wählen. Dadurch sind die Elemente von $(N_F)_\infty$ Produkte von Eichlertransformationen $\phi_{u_ia_i}$ bei denen die a_i in einem (beschränkten) Quader in W_∞^i liegen, und die $(N_F)_p$ liegen in $G(M_p)$. Wir erhalten

$$(K_\infty \cap B_\infty^+)T_cN_{F,\infty}E_\infty \subset (K_\infty \cap G(W)_\infty)T_cN_{F,\infty}E_\infty \subset T_cN_{F^*,\infty}E_\infty^*$$

F^* besteht aus Transformierten von F unter $K_\infty \cap G(W)_\infty$ und ist deshalb in einem beschränkten Quader enthalten. E_∞^* ist als Produkt zweier kompakter Mengen ebenfalls kompakt.

$$(K_p \cap B_p^+)N_{F,p}E_p \subset G(M_p)E_p =: E_p^*$$

Da E kompakt, ist E_p kompakt für alle p und $\subset G(W \cap M_p) \subset G(M_p)$ für fast alle p, und daher ist $\prod_p E_p^*$ kompakt.

Wir zerlegen

$$B_A^+ = B_\infty^+ \times B^{+f}$$

Darin ist

$$(K \cap B_A^+)T_cN_FE \subset [T_cN_{F^*,\infty}E_\infty^*] \times \prod_p E_p^*$$

B^{+f} ist eine lokal kompakte Gruppe mit einem Haarschen Maß, und $\prod E_p^*$ ist ein Kompaktum darin. Die Menge $(K \cap B_A^+)T_cN_FE$ hat in B_A^+ endliches Volumen genau dann, wenn $T_cN_{F^*,\infty}E_\infty^*$ endliches Volumen in B_∞^+ hat. Dieses ist leicht abzuschätzen, wenn man einmal ein Haarsches Maß auf B_∞^+ gefunden hat: In $b = (t_1,....,t_r)\phi_{u_1x_1}....\phi_{u_rx_r}q$ sind die t_i, die x_i sowie q durch b bestimmt. Wir benutzen die Lebesgue-Maße dt_i auf der positiven reellen Achse und die in Kapitel 3 beschriebenen Maße dx_i auf den W_A^i und irgendein Haarsches Maß dq auf $G(W)_A$. Dann bestimmen wir die Funktion h so, daß $h \cdot dt_1....dt_rdx_1....dx_rdq$ rechtsinvariant ist. Dazu benutzen wir die im vorigen Kapitel hergeleitete Formel für die Rechtsverschiebung:

$$\phi_{u_1x_1}.....\phi_{u_rx_r} \cdot \phi_{u_1a_1}....\phi_{u_ra_r} = \phi_{u_1y_1}....\phi_{u_ry_r}$$

wo $y_i = x_i + f_i$ und die f_i nur von $x_{i+1},...x_r$ und den a_i abhängen. Wenn $\alpha = (\alpha_1,....,\alpha_r) \in T$, dann ist

$$\phi_{u_1x_1}.....\phi_{u_rx_r} \cdot \alpha = \alpha \cdot \phi_{u_1,\alpha_1^{-1}\alpha^{-1}x_1}.......\phi_{u_r,\alpha_r^{-1}\alpha^{-1}x_r}$$

Wenn also

$$(t_1,....,t_r)\phi_{u_1x_1}.....\phi_{u_rx_r} \cdot (\alpha_1,....,\alpha_r)\phi_{u_1a_1}....\phi_{u_ra_r} = (t_1^*,....,t_r^*)\phi_{u_1x_1^*}.....\phi_{u_rx_r^*}$$

dann ist

$$t_i^* = \alpha_i t_i \quad \text{und } x_i^* = \alpha_i^{-1}\alpha^{-1}x_i + \{ \text{ Vektoren, die nur von } x_{i+1}, ..., x_r \text{ abhängen } \}$$

Die Funktionaldeterminante ist

$$\frac{\partial(t_1^*, ..., t_r^*, x_1^*, ..., x_r^*)}{\partial(t_1, , , , .t_r, x_1, ...x_r)} = \prod_{i=1}^{r} \alpha_i^{1-\dim W^i} = \prod_{i=1}^{r} \alpha_i^{1-(n-2i)}$$

Folgerung:

$$db = \prod_{i=1}^{r} t_i^{n-2i-1} dt_1....dt_r dx_1....dx_r dq$$

ist rechtsinvariant auf B_∞^+.

Nun ist das Volumen von $T_c N_{F^*,\infty} E_\infty^*$ gleich

$$\int_{T_c} \prod_{i=1}^{r} t_i^{n-2i-1} dt_1....dt_r \quad \cdot \quad \int_{N_{F^*,\infty}} dx_1.....dx_r \quad \cdot \quad \int_{E_\infty^*} dq$$

Der zweite und dritte Faktor sind endlich. Um den ersten Faktor auszurechnen, unterscheiden wir zwei Fälle:

$n > 2r$: Zu integrieren ist über den Bereich $0 < t_i \leq ct_{i+1}$ für $i = 1, ..., r-1$ und $0 < t_r \leq c$. Wir substituieren

$$s_i = \frac{t_i}{t_{i+1}} \text{ für } i < r \text{ und } s_r = t_r$$

mit der Umkehrung

$$t_r = s_r, \quad t_{r-1} = s_{r-1}s_r, ..., t_1 = s_1.....s_r$$

Der t-Bereich geht dabei über in den Quader Q: $0 < s_i \leq c$ für $i = 1, ..., r$. Die Funktionaldeterminante ist

$$\frac{\partial(t_1, ..., t_r)}{\partial(s_1, ..., s_r)} = \begin{vmatrix} s_2....s_r & * & ..... & * \\ 0 & s_3....s_r & ...... & * \\ \vdots & \ddots & & * \\ 0 & .... & & 1 \end{vmatrix} = s_2 s_3^2.....s_r^{r-1}$$

Man erhält das

$$\int_Q \prod_{i=1}^{r} (s_i....s_r)^{n-2i-1} \cdot \prod_{i=1}^{r} s_i^{i-1} \quad ds_1.....ds_r$$

Nach Zusammenfassem der s_i-Potenzen ist das

$$\int_Q \prod_{j=1}^{r} s_j^{j(n-j-1)-1} ds_1....ds_r$$

Da $1 \leq j \leq r$ und $n \geq 2r+1$, sind die Exponenten $\geq 1 \cdot (2r+1-r-1)-1 = r-1 \geq 0$. Daher ist das Integral $< \infty$.

$n = 2r (\geq 4)$: Die MU sind jetzt $0 < t_i \leq ct_{i+1}$ für $i = 1, ..., r-1$ und $0 < t_{r-1}t_r \leq c$. Wir benutzen dieselbe Substitution wie oben und erhalten denselben Integranden, aber einen anderen Integrationsbereich, nämlich

$$0 < s_i \leq c \text{ für } i < r \text{ und } 0 < s_{r-1}s_r^2 \leq c$$

Die Integrale über die s_i mit $i < r-1$ sind dieselben wie oben. Aber für die letzten beiden Koordinaten erhalten wir jetzt

$$\int_{0<s_{r-1}\leq c,\ 0<s_{r-1}s_r^2\leq c} s_{r-1}^{(r-1)r-1} s_r^{r(r-1)-1} ds_{r-1} ds_r = \int_0^c \int_0^{\sqrt{\frac{c}{x}}} (xy)^{r(r-1)-1}\, dx\, dy$$

Eine kurze Rechnung ergibt den Wert $\frac{2c^{r(r-1)}}{[r(r-1)]^2}$. Damit ist bewiesen

Satz 12. *Für alle $c > 0$ hat der Bereich*

$$S_c = K \cdot T_c N_F E \subset G_A$$

endliches Volumen, und für genügend große c ist

$$G_A = S_c \cdot G_{\mathbb{Q}}$$