6. Minkowski'sche Ungleichungen, der Fall $n = 2r$

Wir behandeln zuerst den Fall $n = 2r = 4$ und führen den Fall $n = 2r > 4$ auf diesen zurück.

Den vierdimensionalen Vektorraum V mit zwei zueinander senkrechten hyperbolischen Ebenen kann man realisieren als Vektorraum der zweireihigen Matrizen mit der quadratischen Form

$$(x, x) = 2 \det x$$

(auf diese Idee hat Herr Freitag mich gebracht). Die zugehörige symmetrische Bilinearform ist

$$(x, y) = \det(x + y) - \det x - \det y = x_{11}y_{22} + x_{22}y_{11} - x_{12}y_{21} - x_{21}y_{12}$$

Die Matrizen

$$u_1 := e_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \; v_1 := e_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

bilden ein hyperbolisches Paar, und

$$u_2 := e_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \; v_2 := -e_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

das dazu senkrechte.

Lemma 1. *Jede orthogonale Transformation T von V mit Determinante 1 hat die Gestalt*

$$T(X) = AXB$$

mit invertierbaren Matrizen A und B mit $\det A \cdot \det B = 1$.

Beweis: $T(e_{11})$ ist $\neq 0$, aber $\det T(e_{11}) = 0$. Daher ist $T(e_{11})$ eine Matrix vom Rang 1, also von der Gestalt ab' für zwei Spalten $a, b \neq 0$. Analog ist $T(e_{22}) = cd'$. Die Isometriebedingung lautet

$$1 = (e_{11}, e_{22}) = (ab', cd') = (a_1c_2 - a_2c_1)(b_1d_2 - -b_2d_1)$$

Das zeigt, daß $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ nicht proportional sind, ebenso nicht b und d. Die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ d_1 & d_2 \end{pmatrix}$$

sind daher invertierbar, und man findet nach kurzer Rechnung

$$Ae_{11}B = T(e_{11}), \quad Ae_{22}B = T(e_{22})$$

Damit T eine orthogonale Transformation ist, muß $\det A \cdot \det B = 1$ sein. Setzt man

$$S(X) = A^{-1}T(X)B^{-1}$$

so ist S eine orthogonale Transformation mit $S(e_{11}) = e_{11}$ und $S(e_{22}) = e_{22}$.

Die Links- ebenso wie die Rechtsmultiplikation mit einer Matrix A, betrachtet als lineare Transformation des Vektorraumes der n-reihigen Matrizen, hat bekanntlich die Determinante $(\det A)^n$. Folglich hat $X \mapsto AXB$ die Determinante $(\det A \cdot \det B)^2$. Wegen $\det A \cdot \det B = 1$ ist das $= 1$. Die Transformation S bewirkt nun eine orthogonale Transformation mit Determinante 1 in der von e_{12} und e_{21} aufgespannten hyperbolischen Ebene. Alle solchen sind von der Gestalt

$$e_{12} \mapsto \lambda e_{12}, \quad e_{21} \mapsto \frac{1}{\lambda} e_{21}$$

Dies wird bewirkt durch die Transformation $X \mapsto CXC^{-1}$ mit $C = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (welche e_{11} und e_{22} fest läßt). Also gilt $T(X) = AC\,XC^{-1}B$ für alle X, und Lemma 1 ist bewiesen.

Damit die Abbildung $(A, B) \mapsto T_{A,B}$ ein Homomorphismus wird, definieren wir

$$T_{A,B}(X) = AXB'$$

Nach Satz 6 des vorigen Kapitels kann man A schreiben als $A = PD\Gamma$ mit P in der kompakten Untergruppe, einer Dreiecksmatrix $\begin{pmatrix} d_1 & * \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$ mit

$$|d_1| \leq c|d_2| \tag{1}$$

und $\Gamma \in GL(2, \mathbb{Q})$. Die Matrix $\begin{pmatrix} \frac{1}{\det \Gamma} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \Gamma$ liegt immer noch in $GL(2, \mathbb{Q})$ und hat aber Determinante 1. Den Faktor $\begin{pmatrix} \frac{1}{\det \Gamma} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$ schlagen wir zu D (dabei ändern sich die $|d_i|$ nicht wegen der Produktformel) und erhalten eine neue Darstellung $A = PD\Gamma$ mit denselben $|d_i|$ und $\det \Gamma = 1$. Dasselbe machen wir mit der Matrix B und haben $B = QE\Delta$ mit $E = \begin{pmatrix} e_1 & * \\ 0 & e_2 \end{pmatrix}$ und

$$|e_1| \leq c|e_2| \tag{2}$$

Und dann ist

$$T_{A,B} = T_{P,Q} T_{D,E} T_{\Gamma,\Delta} \tag{3}$$

Um die $|\lambda_i|$ ins Spiel zu bringen, kehren wir zur Basis u_1, u_2, v_1, v_2 zurück. Bezüglich dieser Basis ist die Linksmultiplikation L_A mit A beschrieben durch

$$L_A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & -a_{12} \\ 0 & a_{11} & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{21} & a_{22} & 0 \\ -a_{21} & 0 & 0 & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}W \\ -a_{21}W & a_{22} \end{pmatrix}$$

mit $W = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Für die Rechtsmultiplikation mit B' erhält man

$$R_{B'} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & \tilde{B}' \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = \text{ Adjunkte von } B$$

1. Behauptung: Wenn $P \in SO(2,\mathbb{R})$, dann bilden L_P und $R_{P'}$ die Räume V^+ und V^- auf sich ab.
Beweis: V^+ war aufgespannt von $u_1 + v_1$ und $u_2 + v_2$. Nach der Identifikation von V mit dem Matrizenring sind dies die Matrizen $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Sie spannen den Raum aller $\begin{pmatrix} \lambda & -\mu \\ \mu & \lambda \end{pmatrix}$ auf, und dieser wird bei Links- und Rechtmultiplikation mit Drehmatrizen $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ auf sich abgebildet . Das Gleiche gilt für den Raum V^-, der aus allen $\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \mu & -\lambda \end{pmatrix}$ besteht.

2. Behauptung: Wenn $P \in GL(2,\mathfrak{o}_p)$, dann bilden die Links- und Rechtsmultiplikationen mit P das Standardgitter $\mathfrak{o}_p u_1 + \mathfrak{o}_p v_1 + \mathfrak{o}_p u_2 + \mathfrak{o}_p v_2$ auf sich ab.
Beweis: Offensichtlich haben in diesem Falle die Matrizen L_P und R_P ganze Einträge und sind auch ganz invertierbar (weil $\det P$ Einheit in $\mathfrak{o}_p$ ist).

Folgerung: In der Zerlegung (1) ist $T_{P,Q} \in K$, also $T_{A,B} \in K \cdot T_{D,E} G_{\mathbb{Q}}$

Es bleibt also $T_{D,E}$ zu betrachten. Es ist

$$T_{D,E} = L_D R_{E'} = \begin{pmatrix} d_1 & * \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & \tilde{E}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 E & * \\ 0 & d_2 \tilde{E}' \end{pmatrix}$$

Die ersten beiden Diagonalglieder dieser Matrix sind $\lambda_1 = d_1 e_1$ und $\lambda_2 = d_1 e_2$. Da $T_{D,E}$ eine orthogonale Ttransformation ist, ist $\det D \cdot \det E = 1$, also $d_1 d_2 e_1 e_2 = 1$. Nun folgt

$$|\frac{\lambda_1}{\lambda_2}| = |\frac{e_1}{e_2}| \leq c \text{ nach } (2)$$

und

$$|\lambda_1 \lambda_2| = |d_1^2 e_1 e_2| = |\frac{d_1}{d_2}| \leq c \text{ nach } (1)$$

Das sind die Minkowski'schen Ungleichungen im Falle $n = 2r = 4$.

Satz 8. *Sei $n = 2r \geq 4$. Es gibt eine Konstante $c = c(V)$ mit der Eigenschaft: Zu $g \in G_A$ gibt es $\gamma \in G_{\mathbb{Q}}$ derart daß*

$$(4) \qquad |\lambda_i(g\gamma)| \leq c|\lambda_{i+1}(g\gamma) \text{ für } i = 1,...,r-1 \text{ und } |\lambda_{r-1}(g\gamma)\lambda_r(g\gamma)| \leq c$$

(4) sind die Minkowski'schen Ungleichungen, wenn $n = 2r$.
Beweis: Die ersten $r-1$ Ungleichungen folgen wie in Satz 7, Kapitel 5, wenn γ wie dort minimal gewählt wird. Wir behalten die Bezeichnungen aus Satz 7 bei. Nur der Raum W ist jetzt nicht mehr vorhanden. Wir schreiben

$$g\gamma = mp \text{ mit } p = (\lambda_1, ..., \lambda_r)\phi_{u_1a_1}....\phi_{u_{r-1}a_{r-1}}$$

$$= (\lambda_1, ..., \lambda_{r-2}, 1, 1)\phi_{u_1b_1}.....\phi_{u_{r-2}b_{r-2}} \cdot (1, ..., 1, \lambda_{r-1}, \lambda_r)\phi_{u_{r-1}a_{r-1}}$$

mit $b_i = (1, ..., 1, \lambda_{r-1}, \lambda_r)\, a_i$. Wir setzen

$$(1, ..., 1, \lambda_{r-1}, \lambda_r)\phi_{u_{r-1}a_{r-1}} = \tilde{p}$$

Bei der natürlichen Einbettung von $G(H_{r-1} \perp H_r)$ in G wird die Standard- kompakte Untergruppe der ersteren in K abgebildet. Nach dem schon bewiesenen Fall $n = 4$ gibt es $\tilde{\gamma} \in G_{\mathbb{Q}}(H_{r-1} \perp H_r)$, welches wir uns durch Identität in $H_1 \perp .... \perp H_{r-2}$ auf V fortgesetzt denken, und $\tilde{m} \in G_A(H_{r-1} \perp H_r) \cap K$ mit

$$\tilde{p}\tilde{\gamma} = \tilde{m}(1, ..., 1, \mu_{r-1}, \mu_r)\phi_{u_{r-1}e}$$

mit einem gewissen Vektor $e \in (H_r)_A$, so daß

(5) $$|\mu_{r-1}| \leq c|\mu_r| \text{ und } |\mu_{r-1}\mu_r| \leq c$$

Dann wird mit gewissen durch die Vertauschungsregeln entstehenden d_i

$$g\gamma\tilde{\gamma} = mp\tilde{\gamma} = m(\lambda_1, ..., \lambda_{r-2}, 1, 1)\phi_{u_1b_1}....\phi_{u_{r-2}b_{r-2}}\tilde{p}\tilde{\gamma}$$

$$= m(\lambda_1, ..., \lambda_{r-2}, 1, 1)\phi_{u_1b_1}.....\phi_{u_{r-2}b_{r-2}}\tilde{m}(1, ..., 1, \mu_{r-1}, \mu_r)\phi_{u_{r-1}e}$$

$$= m\tilde{m}(\lambda_1, ..., \lambda_{r-2}, \mu_{r-1}, \mu_r)\phi_{u_1d_1}.....\phi_{u_{r-2}d_{r-2}}\phi_{u_{r-1}e}$$

Daraus folgt

$$|\lambda_j(g\gamma\tilde{\gamma})| = |\lambda_j| \text{ für } j = 1, ..., r-2$$

$$|\lambda_j(g\gamma\tilde{\gamma})| = |\mu_j| \text{ für } j = r-1, r$$

Wegen der Minimalwahl von γ ist $|\lambda_{r-1}| \leq |\mu_{r-1}|$, also erst recht $|\lambda_{r-2}| \leq c|\lambda_{r-1}| \leq c|\mu_{r-1}|$. Zusammen mit (5) bedeutet das, daß mit $\gamma\tilde{\gamma}$ statt γ die sämtlichen Ungleichungen (4) bewiesen sind.

Mit Hilfe von Satz 7 und 8 wollen wir einen Bereich S in G_A konstruieren, der jedenfalls ein Vertretersystem für G_A nach $G_{\mathbb{Q}}$ enthält und von dem wir im nächsten Kapitel beweisen wollen, daß er endliches Volumen hat (für ein Haarsches Maß auf G_A). Man setzt zunächst

(6) $$T_{A,c} = \{(\lambda_1, ..., \lambda_r) \mid |\lambda_i| \leq c|\lambda_{i+1}| \text{ für } i = 1, ..., r-1 \text{ und}$$

$$\begin{cases} |\lambda_r| \leq c & \text{wenn } n > 2r \\ |\lambda_{r-1}\lambda_r| \leq c & \text{wenn } n = 2r \end{cases}$$

und

$$N_A = \{\phi_{u_1x_1}.....\phi_{u_rx_r} \mid x_i \in W_A^i\}$$

Dann besagen Satz 7 und 8: es gibt c so, daß

(7) $$G_A = K \cdot T_{A,c} N_A G(W)_A \cdot G_{\mathbb{Q}}$$

Zuerst zerlegen wir $T_{A,c}$: Wir schreiben die Idele λ_i in der Form

$$\lambda_i = a_i \cdot (1, ..., \omega_{ip}, ...) \cdot (t_i, 1, ...) =: a_i \cdot \omega_i \cdot (t_i, 1, ...)$$

mit reellem $t_i > 0$ und Einheiten ω_{ip} in $\mathfrak{o}_p$ und einem Hauptidel $a_i \in \mathbb{Q}^*$. Das Tupel $\omega := (\omega_1, ..., \omega_r)$ ist in K, und $a := (a_1, ..., a_r) \in G_{\mathbb{Q}}$ Wir identifizieren die reelle Zahl t_i mit dem Idel $(t_i, 1, ...)$ und bezeichnen mit T_c die Menge aller Tupel $(t_1, ..., t_r)$, die den Minkowski'schen Ungleichungen (6) (im Folgenden mit (MU) abgekürzt) genügen. Der Torus T_A normalisiert die Gruppe N_A und ist elementweise mit $G(W)_A$ vertauschbar, und deshalb folgt aus (7), daß

$$G_A = K \cdot T_c \cdot N_A \cdot G(W)_A G_{\mathbb{Q}}$$

Nach dem Kompaktheitssatz gibt es ein Kompaktum $E \subset G(W)_A$ mit $G(W)_A = E \cdot G(W)_{\mathbb{Q}}$. Daraus haben wir

$$G_A = K \cdot T_c \cdot N_A \cdot E \cdot G_{\mathbb{Q}}$$

Mit Hilfe der Operation von $G_{\mathbb{Q}}$ von rechts wollen wir N_A noch verkleinern. (Die Idee dahinter ist: N ist aufgebaut aus additiven Gruppen, und $A = F + \mathbb{Q}$ mit einem relativ kompakten Fundamentalbereich F)

Zunächst stört E zwischen N_A und $G_{\mathbb{Q}}$. Wir schreiben also

$$\phi_{u_1 y_1} ....\phi_{u_r y_r} e = e \phi_{u_1 z_1} ....\phi_{u_r z_r}$$

mit $z_i = e^{-1} y_i$. Zur Abkürzung setzen wir $\phi_{u_2 z_2} ....\phi_{u_r z_r} = \Phi$. Wir haben

$$\Phi u_i = u_i + \sum_{j<i} \eta_{ji} u_j$$

mit gewissen durch $z_2, ..., z_r$ bestimmten η_{ji}.

$$\Phi v_i = v_i + \sum_{j>i} \eta^*_{ji} v_j + \sum_j \zeta_{ji} u_j + w_i$$

und für $w \in W_A$ ist mit gewissen Linearformen f_i

$$\Phi w = w - \sum_{i=2}^{r} f_i(w) u_i$$

Für einen Vektor

$$a_1 = \sum_{i=2}^{r} \lambda_i u_i + \sum_{i=2}^{r} \mu_i v_i + w$$

ist dann

$$\Phi a_1 = \sum_{j=2}^{r} [\lambda_j + \sum_{i>j} \lambda_i \eta_{ji} + \sum_i \mu_i \zeta_{ji} - f_j(w)]\, u_j + \sum_{j=2}^{r} [\mu_j + \sum_{i<j} \mu_i \eta^*_{ji}]\, v_j + \sum_{i=2}^{r} \mu_i w_i + w$$

und

$$\phi_{u_1 z_1} \cdots\cdots \phi_{u_r z_r} \phi_{u_1 a_1} = \phi_{u_1, z_1 + \Phi a_1} \phi_{u_2 z_2} \cdots\cdots \phi_{u_r z_r}$$

Sei F ein Fundamentalbereich für A modulo $\mathbb{Q}$, zum Beispiel $[0,1) \times \prod_p \mathfrak{o}_p$. Zu gegebenen $z_1, ..., z_r$ wählt man jetzt zuerst $\mu_2 \in \mathbb{Q}$ so, daß die v_2-Komponente von $z_1 + \Phi a_1$ in F liegt. Danach wählt man μ_3 für die v_3-Komponente, usw. bis μ_r. Als nächstes wählt man $w \in W_{\mathbb{Q}}$ so, daß die W-Komponente von $z_1 + \Phi a_1$ in einem Fundamentalbereich F_W für W_A modulo $W_{\mathbb{Q}}$ liegt, zum Beispiel $F_W = \sum_i F b_i$, wenn $\{b_i\}$ eine Basis von $W_{\mathbb{Q}}$ über $\mathbb{Q}$ ist. Zuletzt wählt man die λ_j in der Reihenfolge $\lambda_r, ...\lambda_3, \lambda_2$. Das Ergebnis ist:

Zu $z_1, ..., z_r$ gibt es $a_1 \in W_{\mathbb{Q}}^1$ so, daß $z_1 + \Phi a_1 \in F_1 := \sum_{i \geq 2} F u_i + \sum_{i \geq 2} F v_i + F_W$. Das bedeutet

$$\phi_{u_1 z_1} \cdots\cdots \phi_{u_r z_r} \cdot \phi_{u_1 a_1} = \phi_{u_1 f_1} \phi_{u_2 z_2} \cdots\cdot \phi_{u_r z_r} \text{ mit } f_1 \in F_1$$

Genauso können wir $a_2 \in W_{\mathbb{Q}}$ suchen, so daß

$$\phi_{u_2 z_2} \cdots\cdots \phi_{u_r z_r} \phi_{u_2 a_2} = \phi_{u_2 f_2} \phi_{u_3 z_3} \cdots\cdots \phi_{u_r z_r}$$

Schließlich haben wir $a_1, ..., a_r$ mit $a_i \in W_{\mathbb{Q}}^i$, so daß

$$\phi_{u_1 z_1} \cdots\cdots \phi_{u_r z_r} \cdot \phi_{u_1 a_1} \cdots\cdots \phi_{u_r a_r} = \phi_{u_1 f_1} \cdots\cdots \phi_{u_r f_r} \text{ mit } f_i \in F_1$$

Damit ist oben

$$\phi_{u_1 y_1} \cdots\cdots \phi_{u_r y_r} e = e \phi_{u_1 f_1} \cdots\cdots \phi_{u_r f_r} (\phi_{u_1 a_1} \cdots\cdots \phi_{u_r a_r})^{-1}$$

$$\in e \phi_{u_1 f_1} \cdots\cdot \phi_{u_r f_r} \cdot G_{\mathbb{Q}} = \phi_{u_1, e f_1} \cdots\cdots \phi_{u_r, e f_r} \cdot e G_{\mathbb{Q}}$$

Wenn e durch das Kompaktum E läuft, dann bleiben die $\phi_{u_1, e f_1} \cdots\cdots \phi_{u_r, e f_r}$ in einem Kompaktum $N_F \subset N_A$, und wir haben

$$G_A = K \cdot \{(t_1, ..., t_r)\} \cdot N_F \cdot E \cdot G_{\mathbb{Q}}$$

wobei die reellen positiven Zahlen $t_1, ..., t_r$ den MU genügen. Bezeichnen wir die Menge dieser r-Tupel mit T_c, so folgt, daß $K \cdot T_c \cdot N_F \cdot E$ einen Fundamentalbereich für G_A nach $G_{\mathbb{Q}}$ enthält.