4. Der Kompaktheitssatz

Wir behalten die Bezeichnungen des vorigen Kapitels bei. Sei $0 \neq \rho \in \mathbb{Q}$ und

$$\Sigma = \{x \in V \mid (x,x) = \rho\}$$

die "Sphäre vom Radius ρ ". Sei $e \in \Sigma_{\mathbb{Q}}$ fest. Wir kürzen (x,x) mit $F(x)$ ab. Man definiert eine Abbildung π von G_A nach Σ_A durch

$$\pi(g) = g\,e \text{ für } g \in G_A$$

Lemma 1. *π ist stetig und offen.*

Beweis: "stetig" ist klar, weil π durch lineare Gleichungen in den Koeffizienten von g beschrieben werden kann. Für "offen" zeigen wir

1. Für alle v und alle offenen $U_v \subset G_{\mathbb{Q}_v}$ ist $\pi_v(U_v)$ offen in $\Sigma_{\mathbb{Q}_v}$; nämlich: Sei $a \in \pi_v(U_v)$, etwa $a = g_0 e$ mit $g_0 \in U_v$. Wenn $x \in \Sigma_{\mathbb{Q}_v}$ nahe an a ist, dann ist $a+x$ nicht isotrop (weil nahe an $2a$) und wenn S_a die Spiegelung längs a ist, dann ist $S_{a+x}S_a \in G_{\mathbb{Q}_v}$ nahe an 1, also $S_{a+x}S_a g_0$ nahe an g_0 , mithin in U_v , und

$$x = S_{a+x}S_a a = S_{a+x}S_a g_0 e \in \pi_v(U_v)$$

Damit ist $\pi_v(U_v)$ offen.

2. Für fast alle p ist $\pi_p(G(M_p)) = M_p \cap \Sigma_{\mathbb{Q}_p}$. Nämlich: Sei M_p unimodular und $p \neq 2$ und $|\rho|_p = 1$. Wenn $x \in M_p \cap \Sigma_{\mathbb{Q}_p}$ und wenn $|(x+e, x+e)|_p = 1$, dann bilden S_e und S_{x+e} das Gitter M_p in sich ab und

$$S_{x+e}S_e e = x,$$

also $x \in \pi_p(G(M_p)$. Wenn $|(x+e,x+e)|_p < 1$, dann ist $|(x-e,x-e)|_p = 1$. Da M_p unimodular und $p \neq 2$, gibt es $u \in M_p$ mit $(u,e) = 0$ und $|(u,u)|_p = 1$. Dann ist $S_{x-e}S_u e = x$, also wieder $x \in \pi_p(G(M_p)$.

1 und 2 zusammen zeigen, daß π offene Mengen auf offene abbildet.

Lemma 2. *Sind X und Y lokal kompakte Räume und π eine Abbildung von X auf Y , die sowohl stetig als auch offen ist, dann besitzt jedes Kompaktum in Y ein partielles kompaktes Urbild in X .*

Beweis: Sei C kompakt in Y und $\tilde{C}$ das volle Urbild von C . Da π stetig ist, ist $\tilde{C}$ jedenfalls abgeschlossen. Für jedes $x \in \tilde{C}$ nehme man eine offene Umgebung U_x in X , deren abgeschlossene Hülle kompakt ist. Offenbar ist $\tilde{C} \subset \cup_{x\in\tilde{C}} U_x$ und damit $C = \pi(\tilde{C}) \subset \cup_{x\in\tilde{C}} \pi(U_x)$. Da π offen ist, sind alle $\pi(U_x)$ offen in Y . Da C kompakt ist, genügen endlich viele x ; es ist $C \subset \cup_{i=1}^n \pi(U_{x_i}) = \pi(\cup_{i=1}^n U_{x_i})$ Die abgeschlossene Hülle C' von $\cup_{i=1}^n U_{x_i}$ ist kompakt, und damit ist auch ihr Durchschnitt mit der abgeschlossenen Menge $\tilde{C}$ kompakt. Dieser wird bei π genau auf C abgebildet.

Mit Hilfe dieser beiden Lemmata beweisen wir den Kompaktheitssatz:

Satz 3. *Wenn die quadratische Form über* $\mathbb{Q}$ *anisotrop ist, dann ist* $G_A/G_{\mathbb{Q}}$ *kompakt.*

Beweis: Für $n = 1$ ist der Satz trivialerweise richtig, weil dann G nur aus der Eins besteht. Sei $n > 1$ und der Satz bis $n-1$ bewiesen.
Man wählt ein Kompaktum $C \subset V_A$ mit $vol(C) > 1 (= vol(V_A/V_{\mathbb{Q}})$. Für $X \in G_A$ ist $vol(X^{-1}C) = vol(C) > 1$. Daher ist die Projektion $V_A \to V_A/V_{\mathbb{Q}}$ auf $X^{-1}C$ nicht injektiv. Das bedeutet: es gibt $x, y \in X^{-1}C$ mit $0 \neq x - y \in V_{\mathbb{Q}}$. Dann ist $\xi := x - y \in X^{-1}C'$, wobei $C' = C - C$ ebenfalls kompakt ist. Sei etwa $\xi = X^{-1}c$. Dann ist $F(\xi) = F(c) \in \mathbb{Q} \cap F(C')$. Da $\mathbb{Q}$ diskret in A und $F(C')$ kompakt ist, ist $\mathbb{Q} \cap F(C')$ endlich. Daher gehört $F(\xi)$ einem endlichen Vorrat (von 0 verschiedener, weil $V_{\mathbb{Q}}$ anisotrop) Zahlen $\{\zeta_1, ..., \zeta_h\}$ an. Die Betrachtung zeigt: Zu jedem $X \in G_A$ gibt es i mit $1 \leq i \leq h$ und $\xi \in V_{\mathbb{Q}}$ mit $X\xi \in C'$ und $F(\xi) = \zeta_i$
Die Sphäre $\Sigma_{i,A}$ vom Radius ζ_i ist abgeschlossen in V_A, also ist $E_i := \Sigma_{i,A} \cap C'$ kompakt in V_A. Sei e_i ein fester Vektor in $\Sigma_{i,\mathbb{Q}}$. Da $G_{\mathbb{Q}}$ transitiv auf $\Sigma_{i,\mathbb{Q}}$ ist, gibt es $\gamma \in G_{\mathbb{Q}}$ mit $\xi = \gamma e_i$. Die Projektion $G_A \to \Sigma_{i,A}$, gegeben durch $X \mapsto Xe_i$, ist nach Lemma 1 stetig und offen. Nach Lemma 2 gibt es ein partielles kompaktes Urbild K_i, so daß also $E_i = K_i(e_i)$. Nun ist

$$X\gamma e_i = X\xi \in E_i = K_i(e_i) \tag{1}$$

Sei g_i der Stabilisator von e_i. Nach (1) ist $X\gamma \in K_i g_{i,A}$. Damit ist gezeigt, daß

$$G_A = \cup_{i=1}^h K_i \cdot g_{i,A} \cdot G_{\mathbb{Q}} \tag{2}$$

Da $F(e_i) \neq 0$, ist der Stabilisator g_i die spezielle orthogonale Gruppe von $e_i^\perp$, also eines $(n-1)$-dimensionalen nicht ausgearteten Raumes. Nach Induktionsannahme gibt es Kompakta $B_i \subset g_{i,A}$ mit $g_{i,A} = B_i g_{i,\mathbb{Q}}$. Die Bilder der B_i bei der Einbettung von $g_{i,A}$ in G_A sind natürlich kompakt in G_A. Trägt man diese in (2) ein, so ist Satz 3 bewiesen.

Wenn $V_{\mathbb{Q}}$ die null darstellt, gilt der Satz offensichtlich nicht mehr; die orthogonale Gruppe enthält dann eine Gruppe von Diagonalmatrizen $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$, $\lambda \neq 0$. Für diesen Fall wollen wir einen anderen Satz beweisen, wozu wir "Höhen" erklären müssen:
In V_∞ wählen wir eine positiv definite quadratische Form $< , >$, welche unter der Gruppe $K_\infty = O(V^+)O(V^-) \cap G_\infty$ invariant ist, zum Beispiel $< x, x >= (x^+, x^+) - (x^-, x^-) = (x^+, x^+) + |(x^-, x^-)|$, wenn $x = x^+ + x^-$ in $V = V^+ \perp V^-$ ist. Dann setzen wir

$$||x||_\infty = \sqrt{< x, x >}$$

Sodann nehmen wir ein Gitter M in $V_{\mathbb{Q}}$ (vorzugsweise gleich eines, dessen sämtliche Komplettierungen M_p Standardgitter sind) und setzen für $x \in V_{\mathbb{Q}_p}$

$$||x||_p = p^n \text{ wenn } p^n x \text{ ein primitiver Vektor in } M_p \text{ ist}$$

(also $||x||_p \leq 1 \Leftrightarrow x \in M_p$). Dann sei

$$V_A^* = \{x \in V_A \mid x_p \text{ primitiv in } M_p \text{ für fast alle } p\}$$

Für $x \in V_A^*$ definieren wir die Höhe

$$||x|| = \prod_v ||x_v||_v$$

Lemma 3. *Zu $g \in G_A$ gibt es $c(g)$ mit*

$$||gx|| \leq c(g)\; ||x|| \text{ für alle } x \in V_A^*$$

Beweis: Sei $g \in G_A$ und $x \in V_A^*$. Für fast alle p ist $g_p M_p = M_p$ und x_p primitiv in M_p, also $||g_p x_p||_p = 1$, und $\prod_v ||g_v x_v||_v$ ist wohldefiniert. Zu jedem v gibt es eine Schranke $c_v = c_v(g_v)$ mit $||g_v x_v||_v \leq c_v ||x_v||_v$ für alle x_v. Wenn $g_p M_p = M_p$, kann $c_p = 1$ genommen werden. Dann ist $c := \prod_v c_v$ wohldefiniert, und mit diesem c gilt die Behauptung.

Lemma 4. *Zu festem r gibt es nur endlich viele mod $\mathbb{Q}^*$ verschiedene $\xi \in V_{\mathbb{Q}}$ mit $||\xi|| \leq r$.*

Beweis: Aus der Definition folgt $||\gamma x|| = |\gamma| \cdot ||x||$ für jedes Idel γ und $x \in V_A^*$. Wegen der Produktformel ist $||\gamma x|| = ||x||$ wenn $\gamma \in \mathbb{Q}^*$. Ist nun $\xi \in V_{\mathbb{Q}}$, so gibt es $\gamma \in \mathbb{Q}^*$ so, daß $\eta := \gamma\xi$ ein primitiver Vektor in M ist. Für diesen ist $||\eta||_\infty = ||\eta|| = ||\xi|| \leq r$. In der Kugel vom Radius r in V_∞ gibt es aber nur endlich viele Gittervektoren.

Mit Hilfe der Höhe können wir formulieren und beweisen

Satz 4. *Wenn $V_{\mathbb{Q}}$ die Null darstellt, dann gibt es eine Konstante $c = c(V)$ mit der Eigenschaft: Zu jedem $g \in G_A$ gibt es einen isotropen Vektor $\xi \neq 0$ in $V_{\mathbb{Q}}$ mit $||g\xi|| \leq c$.*

Beweis: Ist $n = 2$, so wird V aufgespannt von einem hyperbolischen Paar u, v, und für $g \in G_A$ ist $gu = \lambda u,\; gv = \frac{1}{\lambda} v$, und man kann $c = max(||u||, ||v||)$ nehmen. Sei also $n \geq 3$.
M sei das Gitter in $V_{\mathbb{Q}}$, welches oben zur Definition der Höhe gedient hat. Damit das Argument durchsichtiger wird, benutzen wir ein Kompaktum $C = C_\infty \times \prod_p M_p$, wobei C_∞ die Kugel $< x, x > \leq R^2$ und R so groß ist, daß $vol(C) > vol(V_A / V_{\mathbb{Q}})$. Dann ist $C' := C - C = 2C_\infty \times \prod_p M_p$.
Wie im Beweis von Satz 3 gibt es eine endliche Menge $\{\zeta_0, \zeta_1, ..., \zeta_h\} \subset \mathbb{Q}$ und Vektoren $e_0, ..., e_h \in V_{\mathbb{Q}}$ mit $(e_i, e_i) = \zeta_i$ und der Eigenschaft: Zu $g \in G_A$ gibt es $\gamma \in G_{\mathbb{Q}}$ und ein i so, daß $g\gamma e_i \in C'$. Nur kann jetzt eines der ζ_i, etwa $\zeta_0 = 0$ sein. Jetzt gibt es für g drei Möglichkeiten:

1. $i = 0$. Wir nehmen $\xi = \gamma e_0$. Jeder Vektor $\neq 0$ in $V_{\mathbb{Q}}$ ist in fast allen M_p primitiv, und $g_p M_p = M_p$ für fast alle p. Daher ist $g\xi \in V_A^*$, und wegen $g\xi \in C'$ ist

$$||g\xi|| = ||g_\infty \xi||_\infty \cdot \prod_p ||g_p \xi||_p \leq 2R$$

2. $i \neq 0$ und $(e_i^\perp)_{\mathbb{Q}}$ enthält isotrope Vektoren. Bei der Abbildung $g \mapsto ge_i$ von G_A auf die Sphäre $\Sigma_{i,A}$ besitzt das Kompaktum $C' \cap \Sigma_{i,A}$ ein partielles kompaktes Urbild K_i. Es gibt $k \in K_i$ mit $g\gamma e_i = ke_i$. Nach Induktionsannahme gibt es c_i und zu $k^{-1}g\gamma \in Stab(e_i)_A$ ein isotropes $\eta \in (e_i^\perp)_{\mathbb{Q}}$ mit $||k^{-1}g\gamma\eta|| \leq c_i$. Die Konstanten $c(g)$ aus Lemma 1 sind auf dem Kompaktum K_i beschränkt, etwa $\leq d_i$, und mit $\xi = \gamma\eta$ ist

$$||g\xi|| \leq d_i c_i$$

3. $i \neq 0$ und $(e_i^\perp)_{\mathbb{Q}}$ ist anisotrop. Nach Satz 3 gibt es ein Kompaktum $D_i \subset g_{iA}$ mit $g_{iA} = D_i g_{i\mathbb{Q}}$. Wie unter 2. ist $k^{-1}g\gamma \in g_{iA}$, also nun etwa $k^{-1}g\gamma = d \cdot \delta$ mit $d \in D_i$

und $\delta \in g_{\mathbb{Q}}$. Nach Voraussetzung gibt es in $V_{\mathbb{Q}}$ einen istropen Vektor u_0 . Man setzt $\xi = \gamma\delta^{-1}u_0$ und hat

$$||g\xi|| = ||kdu_0|| \leq const_i$$

weil u_0 fest und k und d in einem Kompaktum laufen. Damit ist Satz 4 bewiesen.