## 3. Integration

$f$ sei eine reellwertige stetige Funktion mit kompaktem Träger auf $\mathbb{Q}_p$, etwa $f = 0$ außerhalb $p^{-N}\mathfrak{o}_p$. Wir teilen $p^{-N}\mathfrak{o}_p$ ein in Restklassen mod $p^k$ und wählen in jeder Restklasse einen Vertreter $a$. Dann bilden wir

$$I_k(f) = \sum_a f(a)p^{-k}$$

Natürlich hängt $I_k$ außer von $k$ auch noch von der Wahl der Vertreter $a$ ab.

Behauptung: Zu $\epsilon > 0$ gibt es $k$ so, daß

$$|I_k(f) - I_m(f)| < \epsilon \text{ für alle } m > k$$

$$\text{und alle Wahlen von Vertretern } \bmod p^k \text{ bzw. } \bmod p^m$$

Beweis: Als stetige Funktion auf einem Kompaktum ist $f$ sogar gleichmäßig stetig: Zu $\epsilon > 0$ gibt es $k$ so, daß $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ falls $x \equiv y \bmod p^k$. Für $m > k$ besteht jede Restklasse mod $p^k$ aus $p^{m-k}$ Restklassen mod $p^m$. Daher ist

$$\sum_{a \bmod p^k} f(a)p^{-k} - \sum_{b \bmod p^m} f(b)p^{-m} =$$

$$\sum_{a \bmod p^k} \{\frac{1}{p^{m-k}} \sum_{b\equiv a \bmod p^k,\, b \bmod p^m} f(a)\} \cdot p^{-k} \quad - \sum_{b \bmod p^m} f(b)p^{-m} =$$

$$\sum_{a \bmod p^k} \quad \sum_{b\equiv a \bmod p^k, b \bmod p^m} \{f(a) - f(b)\}p^{-m}$$

Diese Summe ist dem Betrage nach $< \epsilon p^N$ (die Anzahl der Summanden ist $p^{N+m}$).

Daher existiert der Limes $I$ der $I_k(f)$ für $k \to \infty$ und alle Wahlen von Vertretern $a \bmod p^k$. Er ist ein lineares Funktional auf dem reellen Vektorraum der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger auf $\mathbb{Q}_p$. Definiert man die verschobene Funktion $f_c$ durch $f_c(x) = f(c + x)$, so gilt

$$I(f_c) = I(f)$$

Man nennt $I$ ein Haarsches Maß auf $\mathbb{Q}_p$. ( Für Einzelheiten siehe [L], Seite 107 ff). Das Haarsche Maß ist bis auf einen Faktor bestimmt. Wir schreiben

$$I(f) = \int f(x)\, dx$$

Mit der Definition von $I$ ist das Maß so normiert, daß die offene kompakte Menge $\mathfrak{o}_p$ das Volumen 1 bekommt. Weil $\mathfrak{o}_p$ (für $n \geq 0$) die disjunkte Vereinigung von $p^n$ Restklassen $c + p^n\mathfrak{o}_p$ ist, folgt aus der Translationsinvarianz, daß $p^n\mathfrak{o}_p$ das Volumen $p^{-n}$ besitzt. Und das gilt auch für $n < 0$ (man schreibe $p^n\mathfrak{o}_p$ als Vereinigung von Restklassen mod $\mathfrak{o}_p$ ) Transformationsformel:

(1) $$\int f(ax)\, dx = |a|_p^{-1} \int f(x)\, dx$$

Beweis: Nach Konstruktion des Integrals genügt es, die Behauptung für die Indikatorfunktion $f$ einer Restklasse $c+p^k\mathfrak{o}_p$ zu beweisen. Ihr Integral ist $p^{-k}$. Sei $a=p^nu$ mit einer Einheit $u$ und $g(x)=f(ax)$.

$$g(x)\neq 0 \Leftrightarrow f(ax)\neq 0 \Leftrightarrow ax\in c+p^k\mathfrak{o}_p \Leftrightarrow x\in \frac{c}{a}+p^{k-n}\mathfrak{o}_p$$

$g$ ist also die Indikatorfunktion einer Restklasse $\bmod p^{k-n}$. Ihr Integral ist wie oben bemerkt $=p^{n-k}$. Nun ist

$$\int g(x)dx = p^{n-k} = p^n\int f(x)dx = |a|_p^{-1}\int f(x)dx$$

Auf $\mathbb{Q}_p^n$ nehmen wir das Produktmaß: Für stetige Funktionen $f$ mit kompaktem Träger und $x=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\in\mathbb{Q}_p^n$ kann man es definieren als iteriertes Integral

$$\int f(x)dx = \int(\int .......(\int f(x_1,....,x_n)dx_1)......dx_{n-1})dx_n$$

Der Satz von Fubini besagt, daß das Ergebnis unabhängig von der Reihenfolge der $x_i$ ist. Ferner folgt aus der Translationsinvarianz der Integrale $\int ....dx_i$, daß das $\int f(x)dx$ sich nicht ändert bei elementaren Transformationen

$$\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\mapsto(1+\lambda e_{ij})\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_i+\lambda x_j\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

Weil jede invertierbare Matrix Produkt von elementaren Matrizen $1+\lambda e_{ij}$ und Diagonalmatrizen ist, folgt aus der Transformationsformel (1)

**Satz 2.** *Für jede invertierbare Matrix $A$ gilt*

$$\int f(Ax)\,dx = |\det A|_p^{-1}\int f(x)\,dx$$

Adelisierung: Wir wollen auf dem Adelring $A$ ein Haarsches Maß $dx_A$ definieren mit in einem noch zu erklärenden Sinne $dx_A=\prod_v dx_v$ : Jede Funktion auf $A$ mit kompaktem Träger ist $=0$ außerhalb eines passenden

$$A_S=\prod_{v\in S}\mathbb{Q}_v\times\prod_{p\notin S}\mathfrak{o}_p=\prod_{v\in S}\mathbb{Q}_v\times A^S$$

$A^S$ ist eine kompakte Gruppe, und wir nehmen auf ihr das Haarsche Maß $dx^S$, für welches die ganze Gruppe das Volumen 1 bekommt. Sodann nehmen wir auf $A_S$ das Produktmaß $dx_S=\prod_{v\in S}dx_v\ \cdot\ dx^S$. Das $\int_{A_S}f(x)dx_S$ ist unabhängig von der Wahl der Menge $S$, für welche $A_S$ den Träger von $f$ enthält, nämlich: durch Vergleich von $S, T$ mit $S \cup T$ genügt es, das einzusehen, wenn $S \subset T$. $dx^S$ ist das Haarsche Maß auf $A^S = \prod_{p \notin S} \mathfrak{o}_p$, für welches $A^S$ das Volumen 1 besitzt. Dieselbe Eigenschaft hat das Produktmaß $\prod_{p \in T \setminus S} dx_p \cdot dx^T$. Also ist $dx_S$ die Einschränkung von $dx_T$ auf $A_S$, und daraus folgt die Behauptung.

Beispiel: Wir sahen, daß

$$W = [0,1) \times \prod_p \mathfrak{o}_p$$

ein Vertetersystem für $A$ modulo $\mathbb{Q}$ ist. Das Volumen von $W$ ist

$$\int_W dx_A = \int_0^1 dx_\infty \cdot \prod_p \int_{\mathfrak{o}_p} dx_p = 1$$

Ist $V$ ein $n$-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{Q}$, so wählen wir irgendeine Basis $v_1, .., v_n$ von $V$ über $\mathbb{Q}$ und benutzen die Koeffizienten $x_1, ...., x_n$ in $x = \sum_i x_i v_i$ als Koordinaten. Bei Wahl einer anderen Basis gehen die neuen Koordinaten $y_i$ durch eine lineare Transformation $y = Tx$ aus den alten hervor. Dabei multipliziert sich das Integral in $V_{\mathbb{Q}_p}$ nach Satz 2 mit dem $p$-Betrag der Determinante von $T$. Geht man zur Adelisierung $V_A$ über, so multipliziert sich das Integral mit $\prod_v |\det T|_v$. Nun ist aber $\det T$ eine rationale Zahl , und nach der Produktformal ist $\prod_v |\det T|_v = 1$. Wir haben jetzt auf dem Adelraum $V_A$ ein Maß definiert, welches von der Wahl der Basis von $V$ über $\mathbb{Q}$ unabhängig ist !!