2. Adelisierung

1. Der Adelring von $\mathbb{Q}$.

Definition : Ein Adel ist ein Tupel $(x_\infty, ..., x_p, ...)$ mit

$$x_\infty \in \mathbb{R},\ x_p \in \mathbb{Q}_p \text{ für alle Primzahlen } p \text{ und } x_p \in \mathfrak{o}_p \text{ für fast alle } p$$

Die Adele bilden bei komponentenweiser Addition und Multiplikation einen Ring A, den sogenannten Adelring von $\mathbb{Q}$. Für jede endliche Menge S, welche ∞ enthält, bezeichne

$$A_S = \prod_{v \in S} \mathbb{Q}_v \times \prod_{p \notin S} \mathfrak{o}_p$$

Offenbar ist

(1) $$A = \cup_{endliche\ S}\ A_S$$

A_S wird mit der Produkttopologie versehen ([Sch], Seite 31), und A wird so topologisiert, daß eine Teilmenge von A genau dann offen ist, wenn ihr Durchschnitt mit allen A_S offen in A_S ist. Konkret bedeutet das:

Die

$$W_{\epsilon,S} = \{x = (x_v)_v \mid |x_v|_v < \epsilon \text{ für } v \in S \text{ und } x_p \in \mathfrak{o}_p \text{ für } p \notin S\}$$

wo S alle endlichen Mengen von Bewertungen und ϵ alle reellen Zahlen > 0 durchläuft, bilden ein Fundamentalsystem von Nullumgebungen in A, und eine Teilmenge von A ist genau dann offen, wenn sie mit jedem a auch ein passendes $a + W_{\epsilon,S}$ enthält.

Nach dem Satz von Tychonoff ([Sch], Seite 67) sind alle A_S lokal kompakt, und damit ist auch A lokal kompakt. Dies ist ein Grund dafür, daß man nicht das volle direkte Produkt der $\mathbb{Q}_v$ betrachtet, sondern das "eingeschränkte direkte Produkt" (1).

Lemma 1. *Eine Teilmenge $C \subset A$ ist genau dann relativ kompakt (ihre abgeschlossene Hülle ist kompakt), wenn sie in einer Menge vom Typ*

$$\prod_{v \in S} C_v \times \prod_{p \notin S} \mathfrak{o}_p, \quad (S \text{ endlich },\ C_v \text{ kompakt in } \mathbb{Q}_v)$$

enthalten ist.

Beweis: Da $A = \cup_S A_S$ und alle A_S offen sind, gibt es ein endliches S mit $C \subset A_S$. Die Projektionen $\pi_v : A \to \mathbb{Q}_v$ sind stetig, daher sind alle $C_v := \pi_v C$ kompakt, und $C \subset \prod_v C_v \times \prod_{p \notin S} \mathfrak{o}_v$.

Ist ξ eine rationale Zahl, so ist ξ ganz für fast alle p, also ist $(\xi, ..., \xi, ...)$ ein Adel. Diese Adele heißen Hauptadele. Auf diese Weise fassen wir $\mathbb{Q}$ als Teilring von A auf. In Kapitel 1 hatten wir die p-adische Bewertung so normiert, daß $|p|_p = \frac{1}{p}$ Hier ist einer der Gründe dafür:

Beobachtung: Für alle $\xi \in \mathbb{Q},\ \xi \neq 0$, gilt die Produktformel $\prod_v |\xi|_v = 1$.
Beweis: Zerlege ξ in Primfaktoren: $\xi = \pm \prod_p p^{k_p}$, fast alle $k_p = 0$. Mit der Normierung ist $|\xi|_p = p^{-k_p}$ und $|\xi|_\infty = \prod_p p^{k_p}$.

Lemma 2. $\mathbb{Q}$ *ist diskret in* A *.*

Beweis: $(-1,1) \times \prod_p \mathfrak{o}_p$ ist offen in A und enthält wegen der Produkttformel keine rationale Zahl außer 0 .

Sei $x \in A$ beliebig. Für jede Primzahl p gibt es eine rationale Zahl y_p mit p-Potenznenner, so daß $x_p - y_p \in \mathfrak{o}_p$, und $y_p \neq 0$ nur für endlich viele p, etwa $p \in S$. Für die rationale Zahl $\xi := \sum_{p \in S} y_p$ ist dann $x - \xi \in \mathbb{R} \times \prod \mathfrak{o}_p$. Ist $n \in \mathbb{Z}$, so ist $x_p - \xi - n$ immer noch in $\mathfrak{o}_p$ für alle p, und man kann n so wählen, daß $x_\infty - n \in [0,1]$. Das beweist

Lemma 3. *Das Kompaktum* $[0,1] \times \prod_p \mathfrak{o}_p$ *enthält ein Vertretersystem für* A *modulo* $\mathbb{Q}$ *. Mit anderen Worten:* $A/\mathbb{Q}$ *ist kompakt.*

2. Die Idelgruppe.

Definition: Die (im Ring A) invertierbaren Adele heißen Idele.

Ein Idel ist also ein Tupel

$$(x_\infty, \ldots.., x_p, \ldots..), \text{ für welches } x_v \neq 0 \text{ für alle } v \text{ und } |x_p|_p = 1 \text{ für fast alle } p$$

I wird so topologisiert, daß eine Teilmenge $U \subset I$ genau dann offen ist, wenn U und U^{-1} offen in A sind.

Sei $x \in I$. Für jedes p kann man schreiben

$$x_p = p^{\mu_p} \cdot u_p \text{ mit } \mu_p \in \mathbb{Z} \text{ und } |u_p|_p = 1$$

und dabei sind fast alle $\mu_p = 0$. Mit $\xi = \prod_p p^{\mu_p} \in \mathbb{Q}^*$ ist

$$x = \xi \cdot (y_\infty, \ldots..y_p, \ldots...), \text{ wobei } |y_p|_p = 1 \text{ für alle } p$$

Multipliziert man noch, wenn nötig, mit -1 , so erhält man

$$I = \mathbb{Q}^* \cdot (\mathbb{R}^*_{>0} \times \prod_p \mathfrak{o}_p^*) \qquad (2)$$

(und diese Zerlegung ist direkt, denn die einzige positive rationale Zahl, die durch keine Primzahl teilbar ist, ist 1.)

Für jedes Idel x ist nach Definition von "Idel" $|x_p|_p = 1$ für fast alle p . Daher ist

$$|x| = \prod_v |x_v|_v$$

wohldefiniert. $|x|$ heißt der Idelbetrag von x . Die Produktformel sagt $|\xi| = 1$ für $\xi \in \mathbb{Q}^*$. Ist I^0 die Untergruppe aller $x \in I$ mit $|x| = 1$, so folgt aus (2), daß

$$I^0 = \mathbb{Q}^* \cdot (\{1\} \times \prod_p \mathfrak{o}_p^*)$$

und das zeigt

Lemma 4. *$I^0/\mathbb{Q}^*$ ist kompakt.*

3. Die orthogonale Gruppe.

V sei ein n-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{Q}$ mit einer nicht ausgearteten symmetrischen Bilinearform $(\, , \,)$ und G seine spezielle orthogonale Gruppe. Für Oberkörper K von $\mathbb{Q}$ bezeichnen wir mit V_K bzw. G_K die Punkte von V bzw. G mit Koordinaten in K. Zum Beispiel für $K = \mathbb{Q}_p$ ist $V_{\mathbb{Q}_p}$ ein n-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{Q}_p$ und als solcher lokal kompakt. (Er ist die Vervollständigung von $V_{\mathbb{Q}}$ für die von der p-adischen Bewertung (komponentenweise) induzierte Topologie). Ebenso ist $G_{\mathbb{Q}_p}$ eine lokal kompakte Gruppe. Stellt man sich (nach Wahl einer Basis von V über $\mathbb{Q}$) die Elemente von G als Matrizen vor, so besteht $G_{\mathbb{Q}_p}$ aus Matrizen mit Einträgen in $\mathbb{Q}_p$. Da alle $X \in G$ Determinante 1 haben, bilden die $X \in G_{\mathbb{Q}_p}$ mit Einträgen in $\mathfrak{o}_p$ eine Untergruppe in $G_{\mathbb{Q}_p}$. Diese wird sinngemäß mit $G_{\mathfrak{o}_p}$ bezeichnet. Dann kann man G_A definieren als Menge aller Tupel $X = (X_\infty, ..., X_p, ...)$ mit $X_v \in G_{\mathbb{Q}_v}$ für alle v und $X_p \in G_{\mathfrak{o}_p}$ für fast alle p. Da $G_{\mathfrak{o}_p}$ eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathfrak{o}_p^{n^2}$ ist, sind die $G_{\mathfrak{o}_p}$ kompakt. Für alle endlichen S ist

$$G_{A_S} := \prod_{v \in S} G_{\mathbb{Q}_v} \times \prod_{p \notin S} G_{\mathfrak{o}_p}$$

nach Tychonoff lokal kompakt. Wird G_A so topologisiert, daß eine Menge in G_A genau dann offen ist, wenn ihr Durchschnitt mit allen G_{A_S} offen ist (Topologie des induktiven Limes), dann ist auch G_A eine lokal kompakte Gruppe.

Eine basisunabhängige Beschreibung von G_A erhält man, wenn man dasselbe mit Gittern ausdrückt: Sei M ein $\mathbb{Z}$-Gitter in V und $M_p := M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathfrak{o}_p$ seine Komplettierung an der Stelle p. Die Elemente von G sind jetzt Abbildungen von V auf sich, welche die Form $(\, , \,)$ invariant lassen. Dann besteht G_A aus allen Tupeln

$$\Phi = (\Phi_\infty, ...\Phi_p, ...) \text{ mit } \Phi_v \in G_{\mathbb{Q}_v} \text{ für alle } v \text{ und } \Phi_p(M_p) = M_p \text{ für fast alle } p$$

Diese Definition ist unabhängig von dem benutzten Gitter M wegen

Lemma 5. *Sind L und M zwei Gitter in V, so ist $L_p = M_p$ für fast alle p.*

Beweis: Nach Definition 2 von Gitter ist $L = \sum_i \mathbb{Z}u_i$ und $M = \sum_i \mathbb{Z}v_i$. Die Basen u_i und v_i gehen durch Matrizen A und B auseinander hervor:

$$v_i = \sum_j a_{ji}u_j, \quad u_i = \sum_j b_{ji}v_j$$

In den Nennern aller a_{ji} und b_{ji} gehen nur endlich viele Primzahlen auf. Für alle anderen p ist $L_p = M_p$.

Um aus den lokalen Iwasawa-Zerlegungen eine Zerlegung von G_A zu gewinnen, möchten wir gerne Standardgitter benutzen. Dazu beweisen wir einen Satz über $\mathbb{Z}$-Gitter:

Satz 1.

(a) *Für jedes Gitter* M *ist* $M = \cap_p (V \cap M_p)$

(b) *Sei* M *ein festes Gitter. Zu jeder Kollektion* $\{L^p\}_p$ *von Gittern mit der Bedingung* $L^p = M_p$ *für fast alle* p *gibt es ein Gitter* L *mit* $L_p = L^p$ *für alle* p.

Beweis: (a): M besitzt eine Basis $u_1, ..., u_n$ über $\mathbb{Z}$. Damit ist $V \cap M_p = \sum_i \mathbb{Q} u_i \cap \sum_i \mathfrak{o}_p u_i = \sum_i (\mathbb{Q} \cap \mathfrak{o}_p) u_i$. Aus $\cap_p (\mathbb{Q} \cap \mathfrak{o}_p) = \mathbb{Z}$ folgt die Behauptung.

(b): Wir setzen $L = \cap_p (V \cap L^p)$ und behaupten zunächst, daß L ein Gitter ist. Daß L ein $\mathbb{Z}$-Modul ist, ist klar. Nach der ersten Definition von "Gitter" in Kapitel 1 muß noch gezeigt werden, daß es Zahlen $a, b \neq 0$ gibt mit

$$a \cdot M \subset L \subset b^{-1} \cdot M$$

Da L^p und M_p Gitter in V_p sind, gibt es natürliche Zahlen μ_p und ν_p mit

$$p^{\mu_p} M_p \subset L^p \subset p^{-\nu_p} M_p$$

Da nach Voraussetzung $L^p = M_p$ für fast alle p, kann man fast alle $\mu_p = \nu_p = 0$ nehmen. Dann sind $a = \prod_p p^{\mu_p}$ und $b = \prod_p p^{\nu_p}$ wohldefiniert, und es gilt

$$a\, M_p \subset L^p \subset b^{-1} M_p \quad \text{für alle } p$$

und daher nach Teil (a)

$$a\ M = a \cap_p (V \cap M_p) = \cap_p (V \cap a M_p) \subset \cap_p (V \cap L^p) = L, \text{ und genau so } bL \subset M$$

Also ist L ein $\mathbb{Z}$-Gitter und besitzt als solches eine Basis $x_1, ..., x_n$ über $\mathbb{Z}$. Jetzt wollen wir zeigen, daß die Komlettierungen von L die L^p sind: Jedenfalls ist $L \subset L^p$, und da L^p abgeschlossen ist, ist auch $L_p \subset L^p$. Wenn wir auch noch zeigen können, daß L dicht in L^p ist, dann ist $L_p = L^p$. Sei also $z \in L^p$ gegeben. Jedenfalls ist $z = \sum_i \xi_i x_i$ mit $\xi_i \in \mathbb{Q}_p$. Wir brechen die p-adische Entwicklung von ξ_i an der Stelle k ab (k wird später passend gewählt) :

$$\xi_i = \eta_i + \gamma_i \text{ mit } \gamma_i \in p^k \mathfrak{o}_p$$

η_i ist eine rationale Zahl mit p-Potenznenner, also ganz für alle $q \neq p$. Dann ist $y := \sum_i \eta_i x_i \in V \cap L_q \subset V \cap L^q$ für alle $q \neq p$ und $z - y = \sum_i \gamma_i x_i \in p^k L_p$, also $y \in L^p + p^k L_p$. Wenn k groß genug ist, folgt $y \in \cap_{alle\ q} (V \cap L^q) = L$, und nahe an z für p.

Zur Herstellung der Iwasawa-Zerlegung von G_A schreiben wir über $\mathbb{Q}$

$$V = H_1 \perp ..... \perp H_r \perp W$$

mit (über $\mathbb{Q}$) anisotopem W und hyperbolischen Ebenen $H_i = \mathbb{Q} u_i + \mathbb{Q} v_i$. Sei M irgendein Gitter in V. Für fast alle $p \neq 2$ enthält M_p die u_i und die v_i und ist unimodular. In diesem Falle hat man

$$M_p = (\mathfrak{o}_p u_1 + \mathfrak{o}_p v_1) \perp ..... \perp (\mathfrak{o}_p u_r + \mathfrak{o}_p v_r) \perp (W_p \cap M_p)$$

Wenn W_p isotrope Vektoren enthält, kann man (da M_p unimodular und $p \neq 2$ ist), weitere hyperbolische Teilgitter abspalten und erhält schließlich

$$M_p = (\mathfrak{o}_p u_1 + \mathfrak{o}_p v_1) \perp .... \perp (\mathfrak{o}_p u_{r_p} + \mathfrak{o}_p v_{r_p}) \perp N_p$$

mit $r_p \geq r$ und einem anisotropen unimodularen Gitter N_p. Offenbar ist N_p enthalten in dem in Lemma 2 beschriebenen Gitter aller x mit $|\frac{1}{2}(x,x)| \leq 1$; da aber N_p als unimodulares Gitter maximal ist, ist N_p gleich diesem. Wir sehen: Für fast alle p ist M_p ein Standardgitter im Sinne der lokalen Betrachtung.
Sei S die Menge der endlich vielen übrigen p. Für $p \in S$ wählen wir irgendein Standardgitter L^p, in dessen Basis wir $u_1, ..., v_r$ aufnehmen. Nach Satz 1 gibt es ein Gitter L mit $L_p = L^p$ für $p \in S$ und $L_p = M_p$ für $p \notin S$. Dieses Gitter L benutzen wir in der Definition der Adelgruppe. Es hat den Vorzug, daß seine sämtlichen Komplettierungen Standardgitter sind, in deren Basis $u_1, ..., v_r$ vorkommen. Für die unendliche Stelle ergänzen wir $u_1, ...v_r$ irgendwie zu einem maximalen System $u_1, v_1, ..., u_{r_\infty}, v_{r_\infty}$ hyperbolischer Paare.

Die Gruppe

$$B = \{b \in G \mid bu_i \in \sum_{j \leq i} \mathbb{Q} u_j \text{ für } i = 1, ..., r\}$$

besitzt (wie G) Komplettierungen $B_{\mathbb{Q}_v}$ und eine Adelisierung B_A. Anderseits haben wir für jede Stelle v

$$B^v = \{b \in G_{\mathbb{Q}_v} \mid bu_i \in \sum_{j \leq i} \mathbb{Q}_v u_j \text{ für } i = 1, ..., r_v\}$$

und nach der lokalen Betrachtung war

$$G_{\mathbb{Q}_v} = K_v \cdot B^v$$

mit

$$K_v = \begin{cases} G_{\mathbb{R}} \cap (O(V^+)O(V^-)) & \text{wenn } v = \infty \\ G(L_p) & \text{wenn } v = p \text{ eine Primzahl ist} \end{cases}$$

Nun ist aber offenbar $B^v \subset B_{\mathbb{Q}_v}$, denn für die erste Gruppe werden mehr Bedingungen verlangt als für die zweite. Also gilt erst recht

$$G_{\mathbb{Q}_v} = K_v B_{\mathbb{Q}_v}$$

Das Produnkt $K = \prod_v K_v$ ist eine kompakte Untergruppe von G_A (deshalb mußten wir uns so viel Mühe geben bei der Definition der K_v). Jedes $g \in G_A$ zerlegen wir komponentenweise in $g_v = k_v b_v$. Nach Definition von G_A ist $g_p(L_p) = L_p$ für fast alle p. Für diese ist auch $b_p(L_p) = L_p$, das heißt $b = (b_v)_v$ ist ein Adel von B. Wir erhalten

$$G_A = K \cdot B_A$$

Das ist die Iwasawa-Zerlgung von G_A. Sie ist (im Gegensatz zur lokalen) nicht eindeutig; denn offenbar ist $K \cap B_A \neq 1$.