Vorwort

Dieses Manuskript ist aus einer Vorlesung entstanden, die ich im Wintersemester 2016/17 in Heidelberg gehalten habe. Ziel war es, junge Studenten an ein Thema heranzuführen, das sie in einer Bachelor-Arbeit oder, wenn sie sich noch intensiver damit beschäftigen würden, in einer Master-Arbeit bearbeiten können. Der Reiz für mich bestand darin, wirklich im Einzelnen und mit allen Formeln in Evidenz zu setzen, daß die Minkowski-Siegel'sche Formel in der großen Arbeit von C. L. Siegel aus dem Jahre 1935 äquivalent ist zu der Aussage, daß die Tamagawa-Zahl der speziellen orthogonalen Gruppe in Dimension $m \geq 3$ (zunächst zu einer positiv definiten quadratischen Form) gleich 2 ist. Jeder weiß das, aber niemand hat das im Einzelnen vorgerechnet. Außerdem kann man die Formeln benutzen, um Darstellungen von Zahlen durch Formen (zum Beispiel Quadratsummen) zu betrachten. Den Ansatz dazu habe ich dem Buch von M. Kneser über quadratische Formen entnommen.

So ist das vorliegende Manuskript zwar einem speziellen Thema gewidmet. Es werden aber (grundlegende) Hilfsmittel aus verschiedenen Gebieten (Integration, Fourieranalysis, p-adische Zahlen, Funktionentheorie) benutzt. Da ich die Vorlesung für junge Studenten gedacht hatte, habe ich mir Mühe gegeben, Beweise wirklich auszuführen, zur Bequemlichkeit des Lesers. Vielleicht ist die Vorlesung auf diese Weise ein bißchen ein Zwitter, elementar und speziell zugleich: ich wollte mit wenigen Vorkenntnissen ein interessantes Ziel erreichen. Kundige Leser können ja die mehr elementaren Ausführungen überspringen.

Zum Ablauf der Vorlesung: Das Kapitel 18 habe ich an der Tafel nicht vorgerechnet, die Zeit reichte nicht, und es ist dafür auch nicht besonders geeignet. Es ist dem Seminar "Adeles and Algebraic Groups" von A. Weil entnommen. Dort sind gleichzeitig verschiedene Typen klassischer Matrizengruppen behandelt. Dadurch ist der Beweis sehr lang und mehrmals durch Fallunterscheidungen unterbrochen. Ich habe für den Zweck der Vorlesung den Fall der speziellen orthogonalen Gruppen (und dann auch noch zu positiv definiten Formen) herauspräpariert und so versucht, den Beweis möglichst durchsichtig (und wesentlich kürzer) aufzuschreiben. Das Kapitel 17 hat (zur Hälfte) ein Student in der parallel laufenden Übung vorgeführt. Die Minkowski'schen Ungleichungen (Kapitel 5 und 6) habe ich in dieser Form in der Literatur nicht bewiesen gefunden, sie sind aber natürlich nicht neu. In Kapitel 8 habe ich eine fast überall definierte invariante Differentialform höchsten Grades auf der speziellen orthogonalen Gruppe über $\mathbb{Q}$ beschrieben. Diese konnte ich nirgends in der Literatur finden und wäre für einen entsprechenden Hinweis sehr dankbar. Man kann mit ihr die Integrale im Reellen und über allen $\mathbb{Q}_p$ ausrechnen und so den Zusammenhang mit den Siegel'schen Darstellungszahlen herstellen.

Ich danke Kathrin Maurischat und Burak Cakir für die Hilfe beim Korrekturlesen.