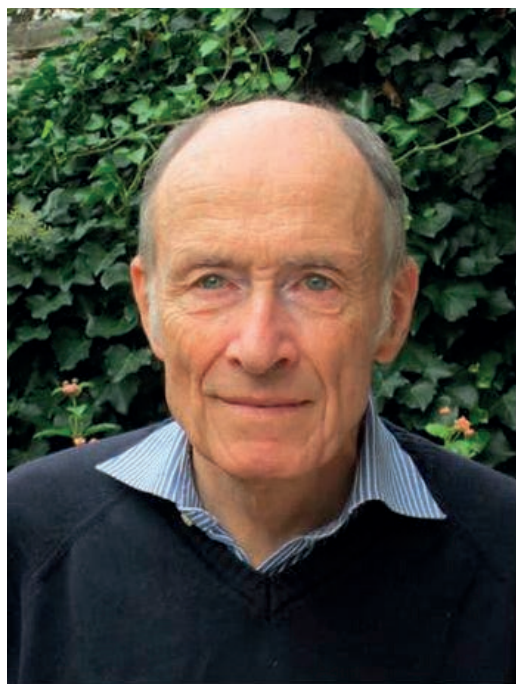


Franz Wegner



Franz Wegner

Franz Joachim Wegner wurde 1940 in Dessau geboren. Nach dem Schulbesuch in Bayreuth studierte er Physik an der Technischen Hochschule München, wo er 1968 promoviert wurde. Zwischen 1970 und 1974 war er tätig in Garching, der Kernforschungsanlage Jülich, an der Brown University in Providence R.I., USA, und der Universität zu Köln. 1974 kam Herr Wegner als Ordentlicher Professor für Theoretische Physik nach Heidelberg. Forschungssemester führten ihn 1978 an die Universität von Chicago, 1987 an die Ecole Normale Supérieure in Paris und an das Centre d'Etudes Nucleaires in Saclay. Zu den Themen, zu denen er herausragende Beiträge lieferte, gehören die Statistische Physik, insbesondere die Theorie der Phasenübergänge und die Renormierungsgruppentheorie. Nach ihm ist der "Wegner-Exponent" benannt, der Korrekturen zum asymptotischen Skalenverhalten von Phasenübergängen beschreibt. Herr Wegner entwickelte grundlegende gittertheoretische Modelle, deren Methodik auch bei der Simulation der Quantenchromodynamik benutzt wird. In der Mathematik ist die "Wegnersche Ungleichung" für die Spektraltheorie gestörter Systeme bekannt. Wegners Arbeiten wurden mit zahlreichen Auszeichnungen geehrt. Dazu gehören der Walter-Schottky-Preis, die Max-Planck-Medaille und der Lars-Onsager-Preis. Seit 2000 ist er Mitglied der Heidelberger Akademie der Wissenschaften. Herr Wegner wurde 2006 emeritiert. 2016 erschien von ihm das Buch "Supermathematics and its applications in statistical physics".

Franz Wegner

Phasenübergänge, Renormierung und Flussgleichung

1940 wurde ich in Dessau geboren. Ende 1944 kam ich mit meiner Mutter nach Kulmbach zu meiner Tante. Mein Vater kam Mitte 1945 nach. Er wusste wohl, dass die Amerikaner nach Bayern kommen und bleiben werden, während Dessau nach anfänglich amerikanischer Besetzung den Russen übergeben würde. 1947 zogen wir nach Bayreuth um. Ich besuchte dort die Oberrealschule, heute Graf-Münster-Gymnasium, und legte 1959 das Abitur ab.

Studium

Im Winter 1959/60 begann ich das Studium der Physik an der Technischen Hochschule München, heute Technische Universität München.

Die Thermodynamik und Statistische Mechanik habe ich dreimal gehört: Im Sommersemester 1961 habe ich die Statistische Mechanik noch bei Gerhard Hettner gehört. Es war das letzte Semester vor seiner Emeritierung. Die Vorlesung umfasste Thermodynamik und klassische Statistik, nur in der letzten Woche Bose- und Fermistatistik. Im Winter darauf waren Wilhelm Brenig und Wolfgang Wild an die Universität gekommen. Bei Wild habe ich im Sommer 1962 die Statistische Mechanik nochmals gehört und gehörte zu den Übungskorrektoren, wobei ich auch meine eigenen Übungen abgab, die von jemand anderem korrigiert wurden. Bei Brenig hörte ich eine richtige Quantenstatistik und leitete die Übungen dazu.

Meine Diplomarbeit *Zum Supraflüssigkeitsmodell für sphärische Atomkerne* fertigte ich bei Brenig an. Die Fragestellung war, ob die damals gängigen Wechselwirkungen für Atomkerne auch die

Stärke der Paar-Wechselwirkung richtig beschreiben, so dass der Grundzustand von Kernen mit geeigneter Nukleonenzahl besser durch einen BCS-Zustand als durch einen Hartree-Fock-Zustand dargestellt wird, da ersterer einen niedrigeren Energie-Erwartungswert ergibt. Dies bewahrheitete sich. Der BCS-Zustand zeichnet sich durch das Auftreten von Paaren von Nukleonen aus. Wie ich später bemerkte, sind es unterschiedliche Kanäle, die dafür verantwortlich sind. Die effektive Wechselwirkung im Teilchen-Teilchen-Kanal, die für die Paar-Bildung verantwortlich ist, muss nicht mit der des Teilchen-Loch-Kanals übereinstimmen.

Die numerischen Rechnungen führte ich anfangs an einer mechanischen Rechenmaschine durch, die allerdings glücklicherweise mit Elektromotor ausgestattet war. Nächstelang saß ich an der Maschine, denn die Durchführung von Rechenoperationen dauerte ganz schön lange. Später konnte ich das Rechenzentrum der TH nutzen, das glücklicherweise im gleichen Gebäude in der Richard-Wagner-Str. untergebracht war. Man musste nur eine Etage tiefer gehen, konnte dann einen Stapel Lochkarten abgeben und hoffen, dass man nach einiger Zeit ein vernünftiges Ergebnis bekam.

Brenig hatte mir eine Doktorarbeit über Dreiteilchen-Anregungen in Kernen vorgeschlagen, also zwei Teilchen und ein Loch oder ein Teilchen und zwei Löcher, ausgehend von einem Kern mit abgeschlossener Schale. Das Thema hat mich im Gegensatz zu dem meiner Diplomarbeit nicht besonders angetan. Ich hätte wohl alsbald etwas sagen sollen; so aber machte meine Doktorarbeit keine Fortschritte. Soviel ich weiß, hat später Peter Schuck auf diesem Thema gearbeitet.

Im Zusammenhang mit meiner Diplomarbeit hatte ich Slater-Integrale auszurechnen. Eine Arbeit habe ich in Nuclear Physics A veröffentlicht. Eine zweite reichte ich bei Zeitschrift für Physik ein. Diese hat mir Jensen mit einem eigentlich sehr freundlichen Brief abgelehnt. Er hat sie nicht abgelehnt, weil sie falsch wäre, sondern weil die Zeitschrift mehr Anwendungen sucht. Allein wie man so etwas auswertet, das sei nicht, was die Zeitschrift sucht. Dies war

für mich wohl insofern ganz gut, als ich mich dann mehr mit physikalischen Inhalten als mit Algorithmen befasste.

Kritische Phänomene und Renormierung

Zu dieser Zeit begann sich Brenig wieder mehr der Festkörperphysik zuzuwenden, darunter auch den kritischen Phänomenen. Hierbei handelt es sich um das Verhalten von Flüssigkeits-Gas-Systemen nahe des kritischen Punkts oder von Ferromagneten nahe der Curie-Temperatur oder auch anderen Systemen mit ähnlichem Verhalten. Bereits 1900 war bekannt, dass die Molekularfeld-Exponenten, entsprechend auch die Vorhersagen der van-der-Waals-Theorie experimentell nicht verifiziert werden konnten. Die van-der-Waals-Gleichung ergibt für die Differenz $\Delta\rho$ der Dichten unterhalb der kritischen Temperatur T_c ein Verhalten $\Delta\rho \propto (T_c - T)^\beta$ mit $\beta = 1/2$; experimentell findet man aber einen Wert für den Exponenten β nahe $1/3$. Ähnliches fand man für die spontane Magnetisierung m von Ferromagneten, $m \propto (T_c - T)^\beta$.

Was gab es also an exakten Ergebnissen, die von der Molekularfeldnäherung abwichen? Da war einmal die Lösung des zweidimensionalen Ising-Modells von Lars Onsager. Er fand für die spontane Magnetisierung den Exponenten $\beta = 1/8$. Das sphärische Modell zeigt ebenfalls ein abweichendes kritisches Verhalten in drei Dimensionen.

Hochtemperatur-Entwicklungen z.B. für das Ising-Modell erlaubten Abschätzungen kritischer Exponenten, die deutlich näher an den experimentell gemessenen lagen. Die Entwicklungen trugen allerdings wenig zum Verständnis des Verhaltens am kritischen Punkt bei. In Seminaren studierten wir die damals entstandenen Review-Artikel. Dies waren vor allem ein experimenteller von Peter Heller und zwei theoretisch ausgerichtete: einer von Michael Fisher und einer von Leo Kadanoff und neun Mitarbeitern, scherzweise United Nations genannt. Von besonderer Bedeutung erwies sich die Homogenitätshypothese von Ben Widom. Die Homogenitätshypothese besagt, dass die freie Energie (bzw. deren singulärer Anteil) eine homogene Funktion der

Temperaturdifferenz ΔT und der Differenz des chemischen Potentials vom kritischen Wert bzw. dem Magnetfeld ist. Das von Leo Kadanoff entwickelte Zellenmodell gibt eine Begründung für diese Hypothese. Sie beschreibt, wie sich die effektive Wechselwirkung unter Änderung der Längenskala verändert, gab aber kein Verfahren zur Berechnung der Exponenten.

Unter der Betreuung von Wilhelm Brenig und Herbert Wagner, der vom Mermin-Wagner-Theorem bekannt ist, schrieb ich meine Doktorarbeit *Zum Heisenberg-Modell im paramagnetischen Bereich und am kritischen Punkt* und promovierte im Juni 1968. Im Wesentlichen habe ich die von Mori, Kawasaki, Resibois und de Leener entwickelte Modenkopplungstheorie auf den Heisenberg-Ferromagneten angewandt. Zunächst war die Idee nur, die Dynamik zu berechnen. Interessanterweise stellte sich heraus, dass man im Rahmen dieser Theorie, die natürlich eine Näherung ist, auch die statischen Korrelationen berechnen kann. Insofern konnte man das Ganze selbstkonsistent durchführen. Die numerischen Rechnungen führte ich an der G3 (21 Kilobyte Speicher) des MPI in München-Freimann durch. Es schlossen sich weitere Rechnungen zur Dynamik am kritischen Punkt von Ferro- und Antiferromagneten an.

Im Anschluss an eine Arbeit von Jasnow und Wortis untersuchte ich mit Eberhard Riedel das Skalenverhalten in (schwach) anisotropen Magneten. Beim Übergang vom anisotropen zum isotropen Ferromagneten ändern sich die kritischen Exponenten sprunghaft. Dies konnten wir erklären, indem wir die Anisotropie als Skalenvariable mit zugehörigem Crossover-Exponenten einführten. Diese Theorie entwickelten wir zunächst für die Statik, erweiterten sie dann auf die Dynamik verschiedener anisotroper ferro- und antiferromagnetischer Systeme.

Ich gebe nun einen kurzen Überblick über meine Wanderjahre:
Nov. 1964 - Nov. 1966 Verwalter einer wiss. Assistentenstelle an der THM.

Dez. 1966 - Okt. 1968 MPI für Physik und Astrophysik, München.

Nov. 1968 - Sep. 1970 Institut Max von Laue - Paul Langevin, Garching

Okt. 1970 - Dez. 1970 und Feb. 1972 - März 1974 Institut für Festkörperforschung an der Kernforschungsanlage Jülich.

Jan. 1971 - Jan. 1972 Brown University, Providence Rhodes Island

Ungefähr alle zwei Jahre habe ich mich weiterbewegt: Anfangs hatte ich eine Assistentenstelle, genauer gesagt, ich war Verwalter einer Assistentenstelle. Dadurch sparte der Staat zehn Prozent Gehalt. Dann war ich fast zwei Jahre am MPI für Physik und Astrophysik in Freimann, dann am Institut Max von Laue - Paul Langevin in Garching. Dies war eine Dependence des Instituts in Grenoble mit etwa zehn Theoretikern, die dann irgendwann abgeschafft wurde. Ab Oktober 1970 war ich am Institut für Festkörperforschung an der KFA Jülich, von wo ich für ein Jahr an die Brown University beurlaubt war.

1970 hatte ich Gelegenheit, an der "Midwinter Solid State Research Conference" in USA teilzunehmen. Diese war für mich außerordentlich interessant, denn dort konnte ich erstmals all die führenden Wissenschaftler auf dem Gebiet der kritischen Phänomene kennenlernen. Ich erwähne nur Günter Ahlers, George Baker, Richard Ferrell, Michael Fisher, Robert Griffiths, Bertrand Halperin, Peter Heller, Pierre Hohenberg, Leo Kadanoff, David Landau, Paul Martin, Michael Schulhof, Eugene Stanley, Gerard Toulouse, Michael Wortis und Peter Young. Auch Ken Wilson kam noch dazu, der über die Operatorprodukt-Algebra sprach. Ein wesentlicher Diskussionspunkt der Konferenz war, ob die Universalitätshypothese gilt, das heißt die kritischen Exponenten nur von Symmetrie und Dimension des Systems abhängen, aber nicht von Details wie etwa dem Gitter. Diese Hypothese bestätigte sich später. Allerdings kann eine lange Reichweite einer Wechselwirkung wesentlich werden. Zu berücksichtigen bei der damaligen Skepsis ist, dass es für das Gas-Flüssigkeits-System keine exakte Symmetrie für die Dichtedifferenz $\rho - \rho_c$ gibt, und dass in magne-

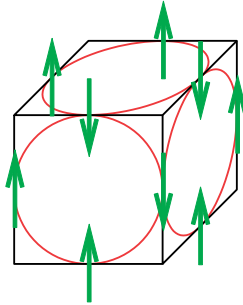
tischen Systemen auch die langreichweitige Dipol-Wechselwirkung eine Rolle spielt.

Die Konferenz war für mich auch deshalb interessant, weil ich mich in den USA um eine Postdoc-Stelle beworben hatte. Auf diese Weise konnte ich diejenigen, bei denen ich mich beworben hatte, persönlich kennenlernen. Ich entschied mich, zu Leo Kadanoff an die Brown University zu gehen. Was ich damals nicht wusste, war, dass gerade zu dieser Zeit Kadanoff sich weniger mit kritischen Phänomenen befasste, sondern mit Urban Planning (Städteplanung), also einem ganz anderen Thema. Trotzdem ging er auf alles gerne ein, und es gibt sogar zwei Arbeiten, die wir zusammen erstellten.

Was ich allerdings zunächst dort machte, hatte ich zum Teil schon aus Deutschland mitgebracht. Es ging dabei um die Verallgemeinerung des Dualitätsarguments von Kramers und Wannier für das zweidimensionale Ising-Modell. Sie verglichen eine Hoch- und eine Tieftemperatur-Entwicklung für die Zustandssumme. In beiden Entwicklungen tritt die gleiche Funktion auf. In der Hochtemperatur-Entwicklung ist es eine Entwicklung nach $\tanh K$, wobei K durch $K = I/k_B T$ gegeben ist. I ist die Kopplung zwischen Ising-Spins auf Nachbarplätzen eines quadratischen Gitters, k_B die Boltzmann-Konstante und T die Temperatur. In der Tieftemperatur-Entwicklung wird nach Potenzen von e^{-2K} entwickelt. Die Autoren nahmen an, dass die freie Energie nur eine Singularität hat und zwar an der kritischen Temperatur, die dann durch $\tanh K = e^{-2K}$ gegeben ist. Dadurch konnten sie den kritischen Wert $K_c = \frac{1}{2} \ln(1+\sqrt{2}) = 0.4407$ bestimmen. Dieser wurde später durch die exakte Lösung von Onsager bestätigt.

Ich stellte mir die Frage, ob man das Dualitätsargument auch auf höhere Dimensionen verallgemeinern kann. Beim dreidimensionalen Ising-Modell fand ich, dass das duale Modell Ising-Spins auf den Kanten der Würfel hat, aus denen sich das Gitter zusammensetzt, wie im Bild gezeigt. Die Wechselwirkung wird als Summe der Produkte der vier Spins auf der Berandung der Quadrate (Plaketten) gegeben. Im Bild sind die vier zu multi-

plizierenden Spins jeweils durch rote Kreise verbunden. Das heißt, dass nun die freie Energie des Plaketten-Modells als Funktion von $\tanh K$ gleich der freien Energie des Ising-Modells ausgedrückt durch die gleiche Funktion aber von e^{-2K} ist (abgesehen von trivialen additiven Beiträgen).



Dieses Modell hat eine lokale Eichinvarianz. Ändert man nämlich die Vorzeichen aller Spins auf Kanten, die an eine bestimmte Ecke anstoßen, so ändert man die Vorzeichen zweier Spins in den anstoßenden Plaketten, so dass die Energie erhalten bleibt.

In vier Dimensionen ist dieses Modell selbstdual, das heißt das Modell mit den Plaketten-Wechselwirkungen geht wieder in eines mit Plaketten-Wechselwirkungen über, so dass sich für die kritische Kopplung der gleiche Wert wie für das zwei-dimensionale Ising-Modell ergibt. Numerische Rechnungen von Creutz, Jacobs und Rebbi haben einen Phasenübergang erster Ordnung im Rahmen der numerischen Genauigkeit bei dieser Kopplung bestätigt.

Etwa zwei Jahre später stellte sich heraus, dass vier-dimensionale Modelle dieser Art, bei denen allerdings die Ising-Spins durch $SU(3)$ -Matrizen ersetzt werden, in der Hochenergiephysik eine wichtige Rolle spielen. Von Null verschiedene Erwartungswerte erhält man für Produkte von Spins auf geschlossenen Linien (bekannt als Wilson-Loops). Je nach Stärke der Kopplung K fällt der Erwartungswert mit e hoch minus Umfang oder mit e hoch minus eingeschlossener Fläche ab. Man findet also zwei

verschiedene Phasen. Man kann die Spin-Wechselwirkung als Wirkung betrachten, grob gesagt als ein über die Zeit integriertes Potential. Dividiert man den Logarithmus des Erwartungswertes durch die Zeitdimension, so erhält man je nach Phase ein endliches effektives Potential oder ein proportional zur Entfernung anwachsendes effektives Potential. Das entspricht der Situation, die man im Quark-Gluon Plasma bzw. in der kondensierten Phase antrifft. Damit stellt das Spin-Modell eine Karikatur dieses Übergangs dar.

Während meines Aufenthaltes an der Brown University gab es zwei sehr interessante Entwicklungen. Zum einen gelang Rodney Baxter die exakte Lösung des Acht-Vertex-Modells. Das Modell ist äquivalent zu zwei zweidimensionalen Ising-Modellen, die durch eine Vier-Spin-Wechselwirkung miteinander gekoppelt sind. Leo Kadanoff und ich hatten Ideen, Baxters Ergebnisse im Limes schwacher Kopplung zu interpretieren (*Some critical properties of the eight-vertex model*).

Im gleichen Jahr erschien Wilsons Näherungs-Lösung für die Renormierung kritischer Spinsysteme. Ihm gelang es, Kadanoffs Zellenmodell in eine Wavelet-Form zu bringen, die erlaubte, die kurzwelligen Spinfluktuationen auszuintegrieren und die Wechselwirkung auf neuer Skala zu berechnen. So konnte er die kritischen Exponenten in drei Dimensionen bestimmen.

Kurze Zeit später zeigten Ken Wilson und Michael Fisher in ihrer berühmten Arbeit *Critical exponents in 3.99 dimensions*, dass die kritischen Exponenten eines $4-\varepsilon$ -dimensionalen Systems in einer ε -Entwicklung berechnet werden können. Dies überzeugte mich sehr, da diese Entwicklung das Ginzburg-Kriterium erfüllt. Es besagt, dass in Dimensionen $d < 4$ das kritische Verhalten vom Molekularfeld-Verhalten abweicht, während man oberhalb vier Dimensionen das Molekularfeld-Verhalten zu erwarten hat. Man bezeichnet vier als die obere kritische Dimension für diese Systeme.

In der Folgezeit beschäftigte ich mich mit dieser Wilsonschen Renormierungsgruppe und führte Entwicklungen um die Dimension 4 durch. Mit Anthony Houghton untersuchte ich das

Verhalten des n -Vektor-Modells für große n . Wir konnten bestätigen, dass man in diesem Limes wie von Eugene Stanley vorhergesagt, das Verhalten des sphärischen Modells erhält. Unsere Arbeit wurde bekannt als *Funktionale Renormierung*, da wir das Potential selbstkonsistent berechneten.

Ich befasste mich aber auch mit der allgemeinen Struktur der Renormierungsgleichungen, insbesondere den Konsequenzen, die sich aus den nichtlinearen Beiträgen ergeben, wie logarithmischen Korrekturen, und den Korrekturen durch irrelevante Operatoren.

Mit Eberhard Riedel (Duke Univ., später Seattle) untersuchten wir Verhalten von Systemen am trikritischen Punkt. Für diesen liegt die obere kritische Dimension bei drei. Dies führt in drei Dimensionen zu logarithmischen Korrekturen zum Molekularfeld-Verhalten.

Zurück an der KFA Jülich in der Gruppe von Herbert Wagner habe ich mich im Dezember 1972 an der Universität zu Köln habilitiert. Meine Habilitationsschrift bestand aus vier Publikationen zur Wilsonschen Renormierungsgruppe

1) *Corrections to Scaling Laws*

2) *Logarithmic Corrections to the Molecular Field Behavior of Critical and Tricritical Systems* (mit Eberhard Riedel)

3) *Critical Exponents in Isotropic Spin Systems*

4) *Critical Exponents for the Heisenberg Model* (mit Morgan Grover und Leo Kadanoff) und einer Zusammenfassung. Den Habilitationsvortrag vor der gesamten Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät hielt ich über die *Hydrodynamik flüssiger Kristalle*, die in Köln obligatorische Einführungsvorlesung über *Phononen-Spektralverteilung in ungeordneten Gittern*.

1973 erhielt ich einen Ruf nach Heidelberg auf eine C4-Professur. Ich wurde vorher einmal von jemandem gefragt, ob ich mich auf eine C3-Professur bewerben möchte. Ich habe Bernhard Mühlischlegel in Köln gefragt, was er dazu meint. Er sagte mir, ich solle keine Zitterbewegungen machen. Ich habe mich dann auf diese Stelle nicht beworben. Der Ruf nach Heidelberg war natürlich etwas anderes. Trotzdem bin ich das etwas leger

angegangen. Das hing damit zusammen, dass mein Fünf-Jahres-Vertrag in Jülich kurz vorher in einen zeitlich unbefristeten umgewandelt wurde. Als ich die Kollegen in Heidelberg kennengelernt hatte, habe ich den Ruf gerne angenommen. Ich erinnere mich noch, dass sich Herr Weidenmüller und Herr Dosch sehr nett um mich gekümmert haben.

Seit April 1974 hatte ich dann mein Dienstzimmer in der schönen Villa Philosophenweg 19, die gerade für die Theoretische Physik, Abteilung Vielteilchenphysik renoviert worden war. Mit Jörg Hüfner, kurz danach auch Heinz Horner, Wolfgang Nörenberg, der an die GSI und nach Darmstadt ging, H. Dieter Zeh und Hans Pirner hatte ich sehr angenehme Arbeitskollegen. Später kam auch Dieter Heermann dazu.

Meine Arbeiten zur Wilson-Renormierung führte ich hier weiter. Insbesondere habe ich auch den Buchartikel *The critical state. General aspects* in Band 6 der Serie *Phase Transitions and Critical Phenomena* von Domb und Green geschrieben.

Anderson Lokalisierung und nichtlineares σ -modell

Mein Einführungs-Vortrag in Köln, den ich als einen möglichen Habilitations-Vortrag vorgeschlagen hatte, über die *Phononen-Spektralverteilung in ungeordneten Gittern* hatte mein Interesse an diesem Problem und auch an dem Verhalten von Elektronen in einem ungeordneten Gitter geweckt. Von besonderem Interesse ist dabei das Verhalten in der Umgebung der Mobilitätskante, der Energie E_c , die lokalisierte und ausgedehnte Zustände trennt. Im Bereich der lokalisierten Zustände ist das System ein Isolator, im Bereich der ausgedehnten metallisch. Dieser Übergang wurde bereits 1958 von Philip Anderson untersucht, war aber in vielen Punkten noch unverstanden. Für wechselwirkungsfreie Elektronen betrachtet man typischerweise ein Tight-binding Modell mit Orbitalen $|r\rangle$ an Gitterorten r . Es wird beschrieben durch einen Hamilton-Operator

$$H = \sum_{r,r'} t_{r-r'} |r\rangle\langle r'| + \sum_r V(r) |r\rangle\langle r|.$$

Dabei sind die t die Hüpff-Matrixelemente zwischen benachbarten Orbitalen und die $V(r)$ die Diagonal-Elemente, die man zufallsverteilt wählt.

Hierfür entwickelte ich 1976 ein Zellenmodell zur Beschreibung des Verhaltens an der Mobilitätskante (*Electrons in disordered systems. Scaling near the mobility edge*). Hieraus ergab sich das Skalengesetz $s = (d-2)\nu$ zwischen dem Exponenten s für die Leitfähigkeit $\sigma \propto (E - E_c)^s$ und dem Exponenten ν für die Lokalisationslänge $\xi \propto |E - E_c|^{-\nu}$.

Angeregt durch Eugene Wigners Zufalls-Matrix-Ensembles zur Beschreibung der Energie-Niveaus im Kern übertrug ich seine Idee auf ein Gitter, indem ich an jedem Gitterort n Orbitale plazierte (*n-Orbital Modell*) und auch die Hüpff-Matrixelemente als Zufallsvariable einführte. Ich begann während eines Sabbaticals 1979 in Chicago (bei Morrel Cohen) damit. Im Limes $n \rightarrow \infty$ lief dies auf die bereits bekannte coherent-potential Näherung hinaus. Alle Zustände waren ausgedehnt (*Disordered system with n orbitals per site. $n = \infty$ limit*).

Interessant wurde das Modell, als ich mit Reinhold Oppermann begann, eine Entwicklung nach Potenzen von $1/n$ durchzuführen. (*Disordered System with n Orbitals per site: $1/n$ expansion*). Es kristallisierte sich heraus, dass 2 die untere kritische Dimension ist, da für $d \leq 2$ die Integrale divergierten. Unter der Annahme, dass die Theorie renormierbar ist, konnten wir die Exponenten $s = 1$ und $\nu = 1/(d-2)$ für reelle und $s = 1/2$ und $1/(2(d-2))$ für komplexe Matrix-Elemente t nahe der unteren Dimension bestimmen.

1979 konnte ich das Modell auf ein System wechselwirkender Matrizen Q mit $n = 0$ Komponenten wegen des Replica-Tricks abbilden: das nichtlineare σ -Modell. Nützlich war die lokale Eichinvarianz, die bewirkt, dass nur Korrelationen (Greensche Funktionen) zwischen Orten beitragen, die paarweise nahe beieinander liegen. (*The mobility edge problem: Continuous symmetry and a conjecture*). Damit war der Andersonübergang in die Klasse der konventionellen Phasenübergänge eingeordnet. Dieser Formulierung waren Aharony und Imry bereits sehr nahe. Sie hatten aber

nur die transversalen Komponenten des Modells berücksichtigt und damit seine Symmetrie übersehen. Mit Lothar Schäfer brachten wir die Theorie 1980 in eine Lagrange-Formulierung (*Disordered system with n orbitals per site: Lagrange formulation, hyperbolic symmetry, and Goldstone modes*).

Eine entsprechende Formulierung mit Grassmann-Variablen gaben 1980 Efetov, Larkin und Khmel'nitskii. Auch bei diesen Rechnungen wurde der Replica-Trick angewandt. Efetov ersetzte diesen 1982 durch eine supersymmetrische Formulierung, die mathematisch besser definiert ist. Mit dem nichtlinearen σ -Modell konnte ich 1980 Exponenten für das inverse Beteiligungsverhältnis und generell für die Erwartungswerte der Potenzen der Wellenfunktion und damit das multifraktale Verhalten bestimmen (*Inverse participation ratio in $2+\varepsilon$ dimensions*).

Ich erwähne einige weitere Arbeiten: *Bounds on the density of states in disordered systems* 1981. Zweck dieser Arbeit war zu zeigen, dass unter recht allgemeinen Bedingungen die Zustandsdichte innerhalb des Bandes nicht verschwindet. Nebenbei ergab sich eine obere Abschätzung der Zustandsdichte, die von Mathematikern für weitere Abschätzungen geschätzt ist.

Für ein zweidimensionales System im starken Magnetfeld und Zufallspotential lässt sich die Zustandsdichte exakt berechnen (*Exact density of states for lowest Landau level in white noise potential. Superfield representation for interacting systems* 1983). Leider ist dies nur für das unterste Landau-Niveau möglich. Brézin, Gross und Itzykson haben die Berechnung auf andere Verteilungen der Unordnung mit einer supersymmetrischen Technik verallgemeinert.

Für das nichtlineare σ -Modell ist keine obere kritische Dimension bekannt. Daher lassen sich nur Entwicklungen um die untere kritische Dimension durchführen. Drei- und vier-Schleifen-Rechnungen für das nichtlineare σ -Modell in $2+\varepsilon$ Dimensionen wurden mit Daniel Hoef und Werner Bernreuther durchgeführt.

Die $2+\varepsilon$ -Entwicklung ergibt Korrekturen zu kritischen Exponenten, die befürchten lassen, dass die zugehörigen Operatoren

relevant werden, also vom Fixpunkt wegführen. Daher untersuchten wir mit Igor Lerner und Herbert Mall die Entwicklung dieser Exponenten für Operatoren mit vielen Gradienten im n -Vektormodell und nichtlinearen σ -Modellen. Dabei ergab sich keine definitive Antwort. Brézin und Hikami gaben eine andere Interpretation.

Dieses Verhalten gab Anlass, auch das Spektrum der Exponenten für das n -Vektor-Modell in $4-\varepsilon$ Dimensionen zu untersuchen. Die Berechnungen mit Stefan Kehrein und Yuri Pismak ergaben jedoch Korrekturen, die die Stabilität des Fixpunkts nicht gefährden.

Eine Klasse von Modellen bekannt als chirale Modelle zeigt in der Bandmitte Singularitäten. Diese wurden 1991 mit Renate Gade untersucht (*The $n=0$ replica limit of $U(n)$ and $U(n)/SO(n)$ models*).

Viele dieser Untersuchungen konnten wir in den 1980er Jahren im Teilprojekt *Ungeordnete physikalische Systeme* des Sonderforschungsbereichs 123 *Stochastische mathematische Modelle* durchführen unter anderem mit John Chalker, Adrianus Pruisken, Angus Mac Kinnon, Reinhold Oppermann, Karl Heinz Hoffmann, Andreas Mielke. Dem SFB gehörte auch Heinz Horner (Spingläser und Hirngespinnste) unter anderem mit Leo van Hemmen, Reimer Kühn und Reinhard Lipowski.

Von 1995 bis 2005 hatten wir das Graduierten-Kolleg *Physikalische Systeme mit vielen Freiheitsgraden* unter anderem mit Stefan Kehrein und Peter Lenz.

An dieser Stelle möchte ich auch kurz meine Sabbaticals und Forschungsaufenthalte erwähnen. An der Brown University in Providence hatte ich vor allem mit Leo Kadanoff, Anthony Houghton, Tom Lubensky und Humphrey Maris Kontakt. An der University von Chicago traf ich Morrel Cohen und Gene Mazenko. In Paris an der Ecole Normale Supérieure und am CEA Saclay konnte ich mit Edouard Brézin, Cyrano de Dominicis, Claude Itzykson und Jean Zinn-Justin diskutieren. An die Universität von Tokyo in Meguro lud mich mehrfach Shinobu Hikami ein.

Fluss-Gleichungen

Ein weiteres Arbeitsgebiet eröffnete ich mir mit den Flussgleichungen. Ziel ist es, den Hamilton-Operator eines Quantensystems zu diagonalisieren oder in eine Form zu bringen, die Diagonalisierung erlaubt. Ähnlich wie in der kontinuierlichen Form der Renormierungsgruppe geschieht dies nicht in einem Schritt, sondern durch eine kontinuierliche unitäre Transformation, die die Außerdiagonalelemente laufend verkleinert. (*Flow equations for Hamiltonians* 1994).

Ein interessantes Ergebnis erhielt ich mit Peter Lenz 1996 bei der Elimination der Elektron-Phonon Wechselwirkung, die für die Supraleitung wesentlich ist. (*Flow equations for electron-phonon interactions*). Der Hamilton-Operator

$$H = \sum_q \omega_q a_q^\dagger a_q + \sum_k \varepsilon_k c_k^\dagger c_k + \sum_{k,q} M_q (a_{-q}^\dagger + a_q) c_{k+q}^\dagger c_k$$

enthält neben den Phononen der Frequenz ω_q und den Elektronen der Energie ε_k die Elektron-Phonon-Kopplung der Stärke M_q . Die Elimination dieser Kopplung ergibt in zweiter Ordnung in M_q die effektive Wechselwirkung

$$H_{\text{eff}} = \sum_q \omega_q a_q^\dagger a_q + \sum_k \varepsilon_k c_k^\dagger c_k + \sum_{k,k',q} V_{k,k',q} c_{k+q}^\dagger c_{k'-q}^\dagger c_{k'} c_k$$

mit der für die Supraleitung wesentlichen Paar-Wechselwirkung

$$V_{k,-k,q} = -|M_q|^2 \frac{\omega_q}{\omega_q^2 \pm (\varepsilon_{k+q} - \varepsilon_k)^2},$$

wobei sich aus den Fluss-Gleichungen das Plus-Zeichen im Nenner ergibt. Die Wechselwirkung ist also durchgehend anziehend. Zweite Ordnung Störungstheorie wie sie von Herbert Fröhlich durchgeführt wurde, ergibt vergleichsweise das Minus-Zeichen im Nenner und man hat dann mit Händen und Füßen zu argumentieren, dass der anziehende Bereich entscheidend ist und nicht der abstoßende. Es gibt natürlich die anspruchsvollere Eliashberg-Theorie, die das Problem löst. Aber das Flussgleichungs-Verfahren führt auf eine instantane Wechselwirkung und ist so einfach, dass

es in einer einführenden Theoretischen Festkörperphysik-Vorlesung gebracht werden kann.

Das Verfahren haben Mitarbeiter auf viele andere Systeme angewendet, unter anderem Kehrein und Mielke auf das Anderson Impurity-Modell, Kehrein, Mielke und Neu auf das Spin-Boson-Modell, Gubankova und ich auf die QED in der Light-front Dynamik, Grote, Hankevych, KÖrding und ich auf das Auftreten verschiedener Phasen im zwei-dimensionalen Hubbard-Modell. Auch Goetz Uhrig hat sich intensiv mit dieser Technik befasst. Stefan Kehrein hat das Buch *The Flow Equation Approach to Many-Particle Physics* (2006) verfasst.

Körper, die in allen Richtungen schwimmen

Ein ganz anderes 'Festkörper'-Problem hat mich in den letzten Jahren auch beschäftigt, das aber mehr mathematischer Natur ist, das Problem 19 im Schottischen Buch. In dieses Buch trugen Mathematiker der Universität Lwow (Lemberg) mathematische Probleme ein.

Das Problem 19 wurde von Ulam gestellt und lautet: Ist die Kugel der einzige Festkörper konstanter Dichte, der in jeder Orientierung schwimmen kann?

Das zweidimensionale Problem lautet: Gibt es lange gerade zylindrische Körper von nicht kreisförmigem Querschnitt, die in jeder Orientierung (mit Achse parallel zur Wasseroberfläche) schwimmen können, ohne zu rotieren? Die Lösung dieses Problems für die Dichte $1/2$ wurde 1938 von Auerbach gefunden. Für andere Dichten fand ich die Lösung 2002-2007 (*Floating bodies of equilibrium*). In Polarkoordinaten (r, ϕ) erhält man die Gleichung für die Berandung

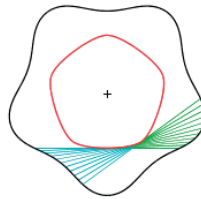
$$\frac{1}{\sqrt{r^2 + (dr/d\phi)^2}} = ar^2 + b + \frac{c}{r^2},$$

die sich auch durch die Krümmung κ der Berandung ausdrücken lässt

$$\kappa = 4ar^2 + 2b.$$

(*Floating bodies of equilibrium in 2D, the tire track problem and electrons in an inhomogeneous magnetic field*). Diese Kurven sind auch Lösungen für zwei andere Probleme: Eines tritt auf im Kriminalroman *The Priory School* von Arthur Conan Doyle, in der Sherlock Holmes und Dr. Watson beim Anblick von zwei Radspuren eines Fahrrads diskutieren, in welche Richtung das Rad fuhr. Das Problem ist: Gibt es außer Kreisen und Geraden Radspuren, denen man nicht entnehmen kann, in welche Richtung der Radler fuhr? Unter der vereinfachten Annahme, dass die Lenksäule senkrecht auf der Ebene steht, auf der das Rad fährt, durchläuft das Vorderrad die (schwarze) Berandungskurve, das Hinterrad die (rote) Einhüllende der Grenzgeraden zwischen Luft und Wasser.

Ein Beispiel wird hier gezeigt:



Zum anderen beschreiben die Berandungskurven die klassischen Trajektorien von Ladungen, die sich senkrecht zu einem parabolischen Magnetfeld bewegen. In einem geeigneten Limes werden diese zu Trajektorien in einem linear anwachsendem Magnetfeld. Diese wurden von Evers, Mirlin, Polyakov und Wölfle in ihrer Arbeit *Semiclassical theory of transport in a random magnetic field* 1999 untersucht.

Für das dreidimensionale Problem habe ich nur Entwicklungen für die Deformation um die Kugel, aber keine geschlossenen Lösungen.

Im April 2006 ließ ich mich emeritieren. Seither bin ich ohne Verpflichtung zu Verwaltungsaufgaben und Vorlesungen, frei für Forschung und Rückblicke.

Ich freue mich, dass ich, angeregt durch die Beschreibung des Anderson Übergangs mit dem nichtlinearen σ -Modell, aber auch

einer ganzen Anzahl anderer Systeme in der Statistischen Mechanik vor Kurzem einen Band in den *Lecture Notes in Physics* (920) über *Supermathematics and its Applications in Statistical Physics – Grassmann Variables and the Method of Supersymmetry* abschließen konnte.

Vortrag gehalten an der Fakultät für Physik und Astronomie der Universität Heidelberg am 14.Juli 2016.