

Anhang A

Topologie

In diesem Appendix beschreiben wir die Grundzüge der mengentheoretischen Topologie in dem Umfang, wie es für das Verständnis des Skripts notwendig ist. Allgemeine topologische Räume verallgemeinern metrische Räume und es zeigt sich, dass viele Konzepte sich in den allgemeinen Rahmen übertragen lassen. Jedoch benötigt man den Begriff des Netzes, um einen fruchtbaren Begriff der Konvergenz in allgemeinen topologischen Räumen zu haben. Sei X eine Menge, $\mathcal{P}(X)$ ihre Potenzmenge und $\Omega \subset \mathcal{P}(X)$. **Definition:** Ω heißt eine Topologie auf X , wenn

- (i) $\emptyset \in \Omega$ und $X \in \Omega$.
- (ii) $O_1, O_2 \in \Omega \Rightarrow O_1 \cap O_2 \in \Omega$.
- (iii) $F \subset \Omega \Rightarrow \left(\bigcup_{O \in F} O\right) \in \Omega$.

Ist Ω eine Topologie auf X , so heißt X oder genauer, (X, Ω) , ein **topologischer Raum** und die Elemente von Ω heißen **offene Mengen** (der Topologie Ω) in X . Die Komplemente offener Mengen heißen **abgeschlossene Mengen**:

Bemerkung:

- (a) Für die abgeschlossenen Mengen gilt
 - (i) \emptyset und X sind abgeschlossen
 - (ii) die Vereinigung zweier abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen
 - (iii) der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.
- (b) \emptyset und X sind in jeder Topologie offen und abgeschlossen zugleich.
- (c) Es gibt zwei ausgezeichnete Topologien, nämlich die **diskrete Topologie** $\Omega = \mathcal{P}(X)$ und die **indiskrete Topologie** $\Omega = \{\emptyset, X\}$.

- (d) Ist (X, Ω) ein topologischer Raum und A eine Teilmenge von X , so gibt es auf A eine natürliche Topologie, nämlich $\Omega_A = \{O \cap A \mid O \in \Omega\}$, genannt die *relative Topologie* oder *Unterraumtopologie* von A .

Definition: Sind Ω und Ω' zwei Topologien auf X , so heißt Ω *stärker* (oder: *feiner*) als Ω' und Ω' *schwächer* (oder: *gröber*) als Ω , wenn $\Omega \supset \Omega'$ gilt. Für $A \subset \mathcal{P}(X)$ ist die *von A erzeugte Topologie* die grösste Topologie Ω mit $A \subset \Omega$. Offenbar gilt $O \in \Omega$ genau dann, wenn O beliebige Vereinigung endlicher Durchschnitte von Elementen aus A ist (man beachte dabei, daß die leere Vereinigung leer, der leere Durchschnitt der ganze Raum X ist). Ist Y eine Menge, $\{(X_\lambda, \Omega_\lambda)\}$ eine Familie topologischer Räume und $\{f_\lambda\}$ eine Familie von Abbildungen $f_\lambda : Y \rightarrow X_\lambda$, so ist die von $\{f_\lambda\}$ *auf Y induzierte Topologie* die grösste Topologie auf Y , die alle f_λ stetig macht (siehe unten), d.h. die von $\bigcup_\lambda (f^{-1}(\Omega_\lambda))$ erzeugte Topologie (hierbei ist natämlich $f^{-1}(\Omega_\lambda) = \{f^{-1}(O) \mid O \in \Omega_\lambda\}$).

Sei (X, Ω) ein topologischer Raum.

Definition: Für $M \subset X$ ist der *offene Kern* M^0 von M die Vereinigung aller offenen Mengen, die in M enthalten sind. Es ist die größte offene Menge, die in M enthalten ist. Der *Abschluß* \overline{M} von M ist der Durchschnitt aller abgeschlossenen Mengen, die M enthalten. Es ist die kleinste abgeschlossene Menge, die M enthält. Eine Menge D mit $\overline{D} = X$ heißt *dicht* in X , eine Menge N mit $(\overline{N})^0 = \emptyset$ heißt *nirgends dicht*. E heißt Menge *von 1. Kategorie*, wenn E abzählbare Vereinigung von irgendwelchen dichten Mengen ist. E heißt Menge *von 2. Kategorie*, wenn E nicht von 1. Kategorie ist.

Definition: Sei (X, Ω) ein topologischer Raum und $a \in X$. Eine Menge $U \subset X$ heißt *Umgebung von a* , wenn es eine offene Menge $V \subset U$ mit $a \in V$ gibt. Ist M eine Teilmenge von X , so heißt a ein *Berührungspunkt* von M , wenn jede Umgebung U von a die Menge M trifft, d.h. $U \cap M \neq \emptyset$ ist. Man nennt a einen *inneren Punkt* von M , wenn M eine Umgebung von a enthält.

Bemerkung: Der Abschluß von M ist gleich der Menge der Berührungspunkte von M . Der offene Kern von M ist gleich der Menge der inneren Punkte von M .

Definition: Eine Teilmenge K des topologischen Raumes (X, Ω) heißt *kompakt* (in der französischen Literatur: quasikompakt), wenn jede Überdeckung von K mit offenen Mengen schon eine Überdeckung durch endlich viele dieser Mengen zuläßt. Eine Menge heißt *relativ kompakt*, wenn ihr Abschlußkompakt ist.

Definition: Sind (X, Ω) und (X', Ω') topologische Räume und f eine Abbildung von X nach Y , so heißt f *stetig*, wenn das Urbild $f^{-1}(O')$ jeder in X' offenen Menge O' offen in X ist (d.h. wenn gilt: $O' \in \Omega' \Rightarrow f^{-1}(O') \in \Omega$). Die Abbildung f heißt *stetig im Punkt $p \in X$* , wenn das Urbild jeder Umgebung von $f(p)$ eine Umgebung von p ist (Äquivalent: wenn es zu jeder Umgebung V von $f(p)$ eine Umgebung U von p mit $f(U) \subset V$ gibt).

Bemerkung: Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ ist stetig genau dann, wenn sie in jedem Punkt von X stetig ist.

Bemerkung: Das Bild einer kompakten Menge unter einer stetigen Abbildung

ist kompakt.

Definition: Eine Menge M mit einer Relation \geq heißt *gerichtete Menge*, wenn gilt:

- (i) $x \geq y, y \geq z \rightarrow x \geq z$
- (ii) $\forall x, y \in M \exists z \in M$ mit $z \geq x, z \geq y$.

Definition: Ein *Netz* in einer Menge X ist eine Abbildung von einer gerichteten Menge Λ nach X . Sie wird meist in der Form $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ oder einfach $\{x_\lambda\}$ notiert. Ein Netz $\{y_\alpha\}_{\alpha \in A}$ heißt *Teilnetz* von $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, wenn es eine Abbildung $n : A \rightarrow \Lambda$ gibt mit $x_{n(\alpha)} = y_\alpha \forall \alpha \in A$ und der Eigenschaft, daß für jedes $\lambda \in \Lambda$ ein $\alpha_0 \in A$ existiert mit $n(\alpha) \geq \lambda \forall \alpha \geq \alpha_0$.

Definition: Ist (X, Ω) ein topologischer Raum, $a \in X$ und $\{x_\lambda\}$ ein Netz in X , so *konvergiert* $\{x_\lambda\}$ gegen a (kurz: $x_\lambda \rightarrow a$), wenn gilt:

$$\forall O \in \Omega \text{ mit } a \in O \exists \lambda_0 \text{ mit } x_\lambda \in O \quad \forall \lambda \geq \lambda_0.$$

Bemerkung:

- a) Konvergiert $\{x_\lambda\}$ gegen a in (X, Ω) , so konvergiert auch jedes Teilnetz gegen a .
- b) Ist (X, Ω) ein topologischer Raum, $a \in X$ und $A \subset X$, so ist $a \in \bar{A}$ genau dann, wenn es ein Netz $\{x_\lambda\}$ in A mit $x_\lambda \rightarrow a$ gibt.
- c) A ist abgeschlossen in X genau dann, wenn für jedes Netz $\{x_\lambda\}$ in A aus $x_\lambda \rightarrow a \in X$ schon $a \in A$ folgt.
- d) K ist kompakt in X genau dann, wenn jedes Netz in K ein in K konvergentes Teilnetz besitzt.
- e) Eine Abbildung f zwischen zwei topologischen Räumen ist genau dann stetig, wenn $f(x_\lambda) \rightarrow f(x)$ gilt für jedes Netz $\{x_\lambda\}$ mit $x_\lambda \rightarrow x$.

Im Fall halbmétrischer Räume (siehe weiter unten) bleibt a) - e) oben richtig, wenn man "Netz" durch "Folge" und "Teilnetz" durch "Teilfolge" ersetzt.

Vorsicht: Jede Folge ist ein Netz und jede Teilfolge davon ein Teilnetz, aber ein Teilnetz von einer Folge braucht keine Folge mehr zu sein.

Produkt topologischer Räume: Ist $\{(X_\lambda, \Omega_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ eine Familie topologischer Räume, so definiert man auf dem Produktraum $X = \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ eine Topologie Ω folgendermaßen: $O \in \Omega \leftrightarrow O$ ist beliebige Vereinigung von Mengen der Form $\prod_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$,