

Kapitel 5

Kompakte Operatoren

5.1 Grundbegriffe

Gleichgradige Stetigkeit und der Satz von Arzela-Ascoli

Definition 5.1.1. Sei X ein topologischer Raum, Y ein halbmotreischer Raum und F eine Menge stetiger Abbildungen von X nach Y . Dann heißt F gleichgradig stetig (oder gleichstetig), wenn es zu jedem $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ eine Umgebung U_x von x gibt mit $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$, für alle $f \in F$ und $y \in U_x$.

Satz 5.1.2 (Arzela-Ascoli). Sei X ein kompakter metrischer Raum und $\mathcal{C}(X)$ der Raum der stetigen \mathbb{K} -wertigen Funktionen auf X mit der Metrik

$$d(f, g) := \max_{x \in X} |f(x) - g(x)|.$$

Dann gilt: Eine Menge $N \subset \mathcal{C}(X)$ ist genau dann relativ kompakt in $\mathcal{C}(X)$, wenn N beschränkt und gleichgradig stetig ist.

Beweis. “ \Rightarrow ” Sei N relativ kompakt. Als Teilmenge der kompakten Menge \overline{N} ist N beschränkt, sogar total beschränkt. Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt $f_1, \dots, f_n \in N$ mit $N \subset \cup_{i=1}^n K_{\frac{\varepsilon}{3}}(f_i)$. Zu $x \in X$ gibt es eine Umgebung U_x mit $|f_i(y) - f_i(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ für alle $y \in U_x$, $i = 1, \dots, n$. Also gilt für $y \in U_x$ und $f \in N$ mit passend gewähltem i :

$$|f(y) - f(x)| \leq |f(y) - f_i(y)| + |f_i(y) - f_i(x)| + |f_i(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

d.h. N ist gleichgradig stetig.

“ \Leftarrow ” Sei N beschränkt und gleichgradig stetig, und sei $\varepsilon > 0$. Zu $x \in X$ existiert $r > 0$ mit $|f(y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$, für alle $y \in U_x$, $f \in N$. Da X kompakt ist, gibt es $x_1, \dots, x_m \in X$ mit $X \subset \cup_{i=1}^m U_{x_i}$. Betrachte $\phi = \{(f(x_1), \dots, f(x_m)) \mid f \in N\}$. Da ϕ eine beschränkte Teilmenge von \mathbb{K}^m ist, ist es relativ kompakt. Es gibt also $f_1, \dots, f_n \in N$ mit

$$|f(x_i) - f_k(x_i)| < \frac{\varepsilon}{3},$$

für alle f und i und geeignetes (von f abhängiges) $k \in \{1, \dots, n\}$. Wir erhalten somit für passendes i und k

$$|f(x) - f_k(x)| \leq |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - f_k(x_i)| + |f_k(x_i) - f_k(x)| \leq 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

d.h. $N \subset \bigcup_{k=1}^n K_\varepsilon(f_k)$. Also ist N nach 1.4.6 (b) relativ kompakt. \square

Definition kompakter Operatoren und Beispiele

Definition 5.1.3. Seien E, F normierte Räume und $T : E \rightarrow F$ linear. Der Operator T heißt **kompakt**, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

(i)

1. Das Bild der Einheitskugel $\{x \in E \mid \|x\| \leq 1\}$ ist relativ kompakt.
2. Das Bild jeder beschränkten Menge ist relativ kompakt.
3. Ist $\{x_n\}$ eine beschränkte Folge, so hat $\{Tx_n\}$ eine konvergente Teilfolge.

(Die Implikation (iii) \Rightarrow (ii) folgt aus Übung 1.6.23)

Bemerkung. Ist die lineare Abbildung $T : E \rightarrow F$ kompakt, so ist das Bild der Einheitskugel beschränkt, d.h. T ist stetig.

Beispiele 5.1.4. (a) Jeder stetige Operator mit endlich-dimensionalem Bild ist kompakt.

(b) Der Eins-Operator eines unendlich-dimensionalen normierten Raumes ist nicht kompakt (Übung 3.5.17).

(c) Sei $\{t_n\} \in l^\infty$. Definiert man den Operator T auf l^2 durch $T(\{x_n\}) := \{t_n x_n\}$, so ist T genau dann kompakt, wenn $\{t_n\}$ eine Nullfolge ist (vgl. Übung 3.5.9).

(d) Sei t eine stetige komplexwertige Funktion auf dem Quadrat $[0, 1] \times [0, 1]$. Definiert man auf $\mathcal{C}([0, 1] \times [0, 1])$ den Operator T durch

$$Tf(x) := \int_0^1 t(x, y)f(y)dy, \text{ so ist } T \text{ kompakt (verwende für den Beweis den Satz von Arzela-Ascoli).}$$

5.2 Eigenschaften kompakter Operatoren

Die Menge der kompakten linearen Operatoren von E nach F bezeichnen wir mit $K(E, F)$. Für $K(E, E)$ schreiben wir auch $K(E)$.

Satz 5.2.1. (a) Sind E und F normiert, so ist $K(E, F)$ ein linearer Teilraum von $B(E, F)$.

- (b) Ist F vollständig, also ein Banachraum, so ist $K(E, F)$ abgeschlossen in $B(E, F)$.
- (c) Sind E, F, G, H normierte Räume und $T \in K(E, F), R \in B(G, E), S \in B(F, H)$, so gilt $S \circ T \circ R \in K(G, H)$. Insbesondere ist $K(E)$ ein Ideal in $B(E)$.

Beweis. (a) Folgt aus der Stetigkeit der Skalarmultiplikation und der Addition in F und der Tatsache, daß stetige Bilder kompakter Mengen kompakt sind..

- (b) Sei $\varepsilon > 0$ und gelte $T_n \rightarrow T$ mit $T_n \in K(E, F), T \in B(E, F)$. Es gibt ein n_0 mit $\|T - T_{n_0}\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Da T_{n_0} kompakt ist, gibt es endlich viele x_1, \dots, x_k aus der Einheitskugel E_1 von E mit $\cup_{i=1}^k K_{\frac{\varepsilon}{3}}(T_{n_0}x_i) \supset T_{n_0}E_1$. Dann gilt $\cup_{i=1}^k K_{\varepsilon}(Tx_i) \supset TE_1$, denn für $x \in E_1$ gilt mit passendem i

$$\begin{aligned} \|Tx - Tx_i\| &\leq \|Tx - T_{n_0}x\| + \|T_{n_0}x - T_{n_0}x_i\| + \|T_{n_0}x_i - Tx_i\| \\ &\leq \|T - T_{n_0}\|\|x\| + \frac{\varepsilon}{3} + \|T - T_{n_0}\|\|x_i\| \\ &< \frac{\varepsilon}{3}\|x\| + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}\|x_i\| \leq \varepsilon \end{aligned}$$

Somit ist TE_1 präkompakt, also, da F vollständig ist, relativ kompakt, d.h. T ist kompakt.

- (c) ist klar, da stetig lineare Abbildungen beschränkte (bzw. kompakte) Mengen in beschränkte (bzw. kompakte) Mengen abbilden. □

Satz 5.2.2. Seien E, F normiert und $T \in K(E, F)$. Dann ist $T' \in K(F', E')$ kompakt. Wenn F vollständig ist gilt auch die Umkehrung.

Beweis. “ \Rightarrow ” Sei $T \in K(E, F)$ und E_1 bzw. F'_1 die Einheitskugel von E bzw. F' . Die Menge $\overline{TE_1}$ ist kompakt. Ist $\varphi \in F'$ so ist $\varphi \circ T : E \rightarrow \mathbb{C}$ im Bild von F' unter T' . Die Abbildung $\varphi \circ T \mapsto \varphi|_{\overline{TE_1}}$ von $T'F'$ nach $\mathcal{C}(\overline{TE_1})$ ist wohldefiniert (denn $\varphi \circ T = \psi \circ T$ impliziert $\varphi = \psi$ auf TE) und isometrisch, denn

$$\|\varphi \circ T\| = \sup_{y \in E_1} |\varphi \circ T(y)| = \sup_{z \in TE_1} |\varphi(z)| = \sup_{z \in \overline{TE_1}} |\varphi(z)|.$$

Die Menge der $\varphi|_{\overline{TE_1}}$, wo $\varphi \in F'_1$, ist wegen $\|\varphi\| \leq 1$ gleichgradig stetig und wegen $\|\varphi|_{\overline{TE_1}}\| \leq \|T\|$ beschränkt, also nach dem Satz von Arzela-Ascoli relativ kompakt. Somit ist auch $T'(F'_1)$ relativ kompakt, d.h. T' ist kompakt. “ \Leftarrow ” Sei $T' \in K(F', E')$. Dann ist nach (i) $T'' \in K(E'', F'')$. Sind J_E und J_F die kanonischen Injektionen von E in E'' bzw. F in F'' , so gilt

$$[T''(J_E(x))](\varphi) = [J_E x](T' \varphi) = \langle x, T' \varphi \rangle = \langle Tx, \varphi \rangle = J_F(Tx)(\varphi)$$

d.h. $J_F^{-1}T''J_E = T$ oder T'' ist eine Fortsetzung von T , wenn wir E mit $J_E E$ und F mit $J_F F$ identifizieren. Wegen $TE_1 \subset T''(E'_1)$ ist TE_1 relativ kompakt in F'' , also da F vollständig ist auch in F . □

5.3 Spektraltheorie kompakter Operatoren

Riesz-Schauder-Theorie

Lemma 5.3.1. *Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} , E ein normierter Raum (über \mathbb{K}), $T \in K(E)$, $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$, und sei $T_\lambda := \lambda - T$. Dann gilt: Das Bild $R(T_\lambda) = T_\lambda E$ ist abgeschlossen in E .*

Beweis. Seien $x_n \in E$ mit $T_\lambda x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y \in E$. Wir können, indem wir zu den x_n geeignete Elemente des Kerns $N(T_\lambda)$ addieren, ohne Einschränkung voraussetzen, dass $\|\dot{x}_n\| \leq \|x_n\| \leq 2\|\dot{x}_n\|$ gilt, wobei $\|\dot{x}_n\|$ die zum Faktorraum $\dot{E} = E/N(T_\lambda)$ gehörige Quotientennorm ist.

- (a) Ist $\{x_n\}$ beschränkt, so gibt es eine Teilfolge $\{x_{n_k}\}$ mit $Tx_{n_k} \rightarrow z \in E$. Also ist $x_{n_k} = \frac{1}{\lambda}(T_\lambda x_{n_k} + Tx_{n_k})$ konvergent gegen $x = \frac{1}{\lambda}(y + z)$ und wegen der Stetigkeit von T_λ folgt $T_\lambda x = y$, also $y \in R(T_\lambda)$.
- (b) Ist $\{x_n\}$ unbeschränkt, so betrachten wir $x'_n = \frac{x_n}{\|x_n\|}$. Es gilt $T_\lambda x_n \rightarrow 0$ und (indem wir zu einer geeigneten Teilfolge übergehen, s.o.) $x_n \rightarrow s \in E$, also $T_\lambda s = \lim T_\lambda x'_n = 0$, d.h. $s \in N(T_\lambda)$. Es folgt $1 = \|x'_n\| \leq 2\|\dot{x}_n\| \rightarrow 2\|\dot{s}\| = 0$, ein Widerspruch. Also kann der Fall (b) nicht auftreten, und die Behauptung ist bewiesen. □

Lemma 5.3.2. *Sei E normiert, $T \in K(E)$, $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$ und sei wieder $T_\lambda := \lambda - T$. Dann gilt: Die kanonische Abbildung $\dot{x} \mapsto T_\lambda x$ von $E/N(T_\lambda)$ auf $R(T_\lambda)$ ist ein bistetiger Isomorphismus.*

Beweis. Die Isomorphie und Stetigkeit der Abbildung ist klar. Es bleibt die Stetigkeit der Umkehrabbildung zu zeigen. Gilt $T_\lambda x_n \rightarrow T_\lambda z$ und wählen wir (durch Addition geeigneter Elemente aus $N(T_\lambda)$) die x_n so, dass $\|\dot{x}_n\| \leq \|x_n\| \leq 2\|\dot{x}_n\|$ gilt, so zeigt der Beweis des letzten Lemmas, dass es eine konvergente Teilfolge $x_{n_k} \rightarrow x \in E$ gibt. Es folgt $\dot{x}_{n_k} \rightarrow \dot{x}$ sowie $T_\lambda x_{n_k} \rightarrow T_\lambda x = T_\lambda z$, also $\dot{x} = \dot{z}$. Somit ist die Abbildung $T_\lambda z \mapsto \dot{z}$ stetig. □

Satz 5.3.3. *Sei E normiert, $T \in K(E)$ und sei $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$. Dann gilt: λ ist Eigenwert oder liegt in der Resolventenmenge. Es gilt also:*

$$\sigma(T) \setminus \{0\} = \sigma_p(T) \setminus \{0\}.$$

Beweis. Sei $\lambda \notin \sigma_p(T)$, also $N(T_\lambda) = \{0\}$. Wegen Lemma 5.3.2 ist T_λ ein bistetiger Isomorphismus von E auf $R(T_\lambda)$. Wir zeigen $R(T_\lambda) = E$. Andernfalls wäre $E_1 := R(T_\lambda)$ ein abgeschlossener echter Teilraum von E . Da T_λ injektiv ist, ist dann $E_2 = T_\lambda E_1$ ein echter (und abgeschlossener) Teilraum von E_1 u.s.w. mit $E_n = T_\lambda E_{n-1}$. Für jedes n sei nun $y_n \in E_n$ mit $\|y_n\| = 1$ und $\text{dist}(y_n, E_{n+1}) \geq \frac{1}{2}$. Für $n > m$ gilt

$$Ty_n - Ty_m = (T_\lambda - \lambda)(y_m - y_n) = -\lambda y_m + r, \text{ wobei } r \in E_{m+1}.$$

Also ist

$$\|Ty_n - Ty_m\| \geq \text{dist}(\lambda y_m, E_{m+1}) \geq |\lambda| \frac{1}{2}.$$

Somit kann $\{Ty_n\}$ keine konvergente Teilfolge enthalten, also ist T nicht kompakt, ein Widerspruch. Also gilt $R(T_\lambda) = E$ und T_λ ist somit invertierbar. \square

Zur Vorbereitung des nächsten Satzes halten wir für normales $T \in B(H)$ drei Eigenschaften fest.

(i) Wegen $T^*T = TT^*$ gilt $\|Tx\| = \|T^*x\|$, $\forall x \in H$, denn

$$\|Tx\|^2 = (Tx | Tx) = (T^*Tx | x) = (TT^*x | x) = \|T^*x\|^2.$$

(ii) Ist λ ein Eigenwert von T und x der zugehörige Eigenvektor, so ist x auch Eigenvektor von T^* zum Eigenwert $\bar{\lambda}$. Denn $T - \lambda$ ist normal und $0 = \|Tx - \lambda x\| = \|(T^* - \bar{\lambda})x\|$, also $T^*x = \bar{\lambda}x$.

(iii) Sind $\lambda \neq \mu$ Eigenwerte von T , so sind die zugehörigen Eigenräume E_μ , E_λ zueinander orthogonal. Denn ist $Tx = \lambda x$, $Ty = \mu y$, so gilt

$$\lambda(x | y) = (Tx | y) = (x | T^*y) = (x | \bar{\mu}y) = \mu(x | y),$$

also $(x | y) = 0$, da $\mu \neq \lambda$.

Satz 5.3.4 (Spektralsatz für normale kompakte Operatoren). *Sei H ein Hilbertraum über \mathbb{C} und $T \in B(H)$ normal. Dann gibt es eine ONB von H aus Eigenvektoren von T .*

Ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ so gilt dieser Satz für selbstadjungierte kompakte Operatoren.

Beweis. Sei in jedem Eigeräum von T eine ONB gewählt und \mathcal{B} die Vereinigung dieser ONBs, was wegen (iii) oben ein ONS ist. Sei $F = \overline{\text{Lin } \mathcal{B}}$. Da die Eigenräume invariant unter T und (wegen (ii) oben) T^* sind, ist F invariant unter T und T^* , folglich auch F^\perp . Der Operator $T|_{F^\perp}$ ist normal und kompakt. F^\perp enthält keinen Eigenvektor von T , da F alle Eigenvektoren enthält. Wäre $F^\perp \neq \{0\}$, so wäre entweder $T|_{F^\perp} = 0$, was die Existenz eines Eigenvektors zum Eigenwert 0 implizierte und deshalb nicht sein kann, oder $T|_{F^\perp} \neq 0$, was wegen $r(T|_{F^\perp}) = \|T|_{F^\perp}\|$ und Satz 5.3.3 die Existenz eines Eigenwerts λ mit $|\lambda| = r(T|_{F^\perp})$ und somit auch eines zugehörigen Eigenvektors implizierte, was ebenfalls nicht sein kann. Somit gilt $F^\perp = \{0\}$, also $F = H$, d.h. \mathcal{B} ist eine ONB von H . \square

Proposition 5.3.5. *Sei E normiert, $T \in K(E)$ und $\{\lambda_n\}$ eine Folge voneinander verschiedener Eigenwerte von T . Dann gilt: $\lambda_n \rightarrow 0$.*

Beweis. (a) Seien φ_i zu λ_i gehörige normierte Eigenvektoren von T für jedes i . Wir zeigen, daß die φ_i linear unabhängig sind. Wenn nicht, gäbe ein kleinstes $n \in \mathbb{N}$ mit $\varphi_n = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \varphi_i$, woraus $0 = (T - \lambda_n)\varphi_n = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i (\lambda_i - \lambda_n)\varphi_i$ folgt, was wegen $\lambda_i \neq \lambda_n$ die lineare Abhängigkeit von $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}$ bedeutete, ein Widerspruch.

- (b) Sei E_i der von $\varphi_1, \dots, \varphi_i$ aufgespannte Teilraum für jedes i . Wähle g_i aus der Einheitskugel von E_i so, dass $\inf_{x \in E_{i-1}} \|g_i - x\| \geq \frac{1}{2}$ ist. Da jedes g_i eine Linearkombination von $\varphi_1, \dots, \varphi_i$ ist, gilt $\|Tg_i - Tg_{i-k}\| = \|\lambda_i \alpha_i \varphi_i + \text{Vektor aus } E_{i-1}\| \geq \frac{1}{2} |\lambda_i|$. Wäre nun $\{\lambda_{i'}\}$ eine Teilfolge von $\{\lambda_i\}$ mit $|\lambda_{i'}| \geq c > 0$, so erhielten wir durch Betrachtung der zugehörigen g_i offensichtlich

$$\|Tg_{i'} - Tg_{(i-k)'}\| \geq \frac{1}{2} |\lambda_{i'}| \geq \frac{c}{2},$$

d.h. $\{T_{i'}\}$ könnte keine konvergente Teilfolge haben, was der Kompaktheit von T widerspräche. Folglich gilt: $\lambda_n \rightarrow 0$. □

Proposition 5.3.6. *Sei $T \in B(E)$, $T' \in B(E')$ sein dualer Operator.*

- (a) *Es gilt: $\sigma(T') \subset \sigma(T)$.*
 (b) *Es gilt: $\sigma_p(T) \subset \sigma(T')$.*
 (c) *Für $T \in K(E)$ gilt: $\sigma(T) = \sigma(T')$ und $\sigma_p(T) \setminus \{0\} = \sigma_p(T') \setminus \{0\}$.*

Beweis. (a) Ist $A \in B(E)$ mit $A(\lambda - T) = (\lambda - T)A = \text{Id}_E$, so folgt $(\lambda - T')A' = A'(\lambda - T') = \text{Id}_{E'}$, also gilt $\rho(T) \subset \rho(T')$ und somit $\sigma(T) \supset \sigma(T')$.

- (b) Ist $\lambda \in \sigma_p(T)$, so sei $0 \neq x \in E$ mit $T_\lambda x = 0$. Für beliebiges $\varphi \in E'$ gilt: $(T'_\lambda \varphi)(x) = \varphi(T_\lambda x) = \varphi(0) = 0$. Ist nun $\psi \in E'$ mit $\psi(x) = 1$, so gilt also $\psi \neq T'_\lambda \varphi \forall \varphi \in E'$, d.h. T'_λ ist nicht surjektiv, also $\lambda \in \sigma(T')$.

- (c) Wegen (a),(b) und Satz 5.3.3 gilt $\sigma_p(T) \setminus \{0\} = \sigma_p(T') \setminus \{0\}$. Gilt $0 \in \rho(T')$, so gibt es $A \in B(E')$ mit $T'A = \text{Id}_{E'}$. Dann ist $\text{Id}_{E'}$ kompakt, also E' und somit E endlich-dimensional und deshalb $\sigma(T) = \sigma(T')$. Gilt $0 \in \sigma(T')$, so folgt mit (a) $0 \in \sigma(T)$, also $\sigma(T) = \sigma(T')$. □

Bemerkung.

- (i) Ist E ein Banachraum, so gilt in (a) oben stets $\sigma(T') = \sigma(T)$ (siehe 2.3.8).
 (ii) Die Implikation $0 \in \sigma_p(T) \Leftrightarrow 0 \in \sigma_p(T')$ ist in beide Richtungen falsch, selbst für kompakte T .

Fredholmsche Alternative

Proposition 5.3.7.

- (i) *Wie das Argument in Teil (c) der letzten Proposition 5.3.6 zeigt, impliziert $0 \in \rho(T)$ für $T \in K(E)$, daß $\dim E < \infty$ gilt. Also gilt für $T \in K(E)$ stets $0 \in \sigma(T)$, wenn E unendlich-dimensional ist.*

(ii) Für $T \in K(E)$ und $\lambda \neq 0$ gilt

$$T_\lambda \text{ surjektiv} \iff T_\lambda \text{ injektiv} .$$

Beweis. “ \Rightarrow ” Aus $R(T_\lambda) = E$ folgt $N(T'_\lambda) = R(T_\lambda)^\circ = \{0\}$, also $\lambda \notin \sigma_p(T')$ und somit nach Proposition 5.3.6 (c) $\lambda \notin \sigma_p(T)$.

“ \Leftarrow ” folgt aus Satz 5.3.4. □

Die obige Äquivalenz wird auch als **Fredholmsche Alternative** formuliert: Entweder ist die Gleichung $T_\lambda x = y$ für jedes $y \in E$ lösbar (sogar eindeutig), oder die Gleichung $T_\lambda x = 0$ hat eine nichttriviale Lösung.

Lemma 5.3.8. *Sei E normiert, $T \in K(E)$ und $0 \neq \lambda \in \sigma_p(T)$. Dann gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $E = N(T_\lambda^n) \oplus R(T_\lambda^n)$. Die beiden Teilräume sind T -invariant und abgeschlossen und die Summennorm ist zur ursprünglichen Norm auf E äquivalent.*

Beweis. Es gilt $E \supset R(T_\lambda) \supset R(T_\lambda^2) \supset R(T_\lambda^3) \supset \dots$. Ab einer bestimmten Stelle muss \supset statt \supset gelten (sonst wäre T nicht kompakt, vgl. den Beweis des Satzes 5.3.3). Gelte also $R(T_\lambda^n) = R(T_\lambda^{n+1})$. Offenbar sind $N(T_\lambda^n)$ und $R(T_\lambda^n)$ invariant unter T_λ (also auch unter T), und sie sind abgeschlossen, da $T_\lambda^n = \lambda^n \cdot S$ mit einem $S \in K(E)$ (vgl. Lemma 5.3.1 oben). Es gilt $\dim N(T_\lambda^n) < \infty$, denn auf $N(T_\lambda^n)$ ist $S = \lambda^n \cdot \text{Id}$, und S ist kompakt. Wegen $T_\lambda R(T_\lambda^n) = R(T_\lambda^n)$ ist $T_\lambda|_{R(T_\lambda^n)}$ invertierbar (vgl. Proposition 5.3.7 (b) oben). Sei nun $x \in E$, also $z = T_\lambda^n x \in R(T_\lambda^n)$. Ist $y \in R(T_\lambda^n)$ mit $T_\lambda^n y = z$, so folgt $T_\lambda^n(x - y) = 0$, also $x - y \in N(T_\lambda^n)$ und somit $x \in N(T_\lambda^n) + R(T_\lambda^n)$. Die Summendarstellung ist eindeutig, denn für $u \in N(T_\lambda^n) \cap R(T_\lambda^n)$ gilt $T_\lambda^n u = 0$, und wegen der Injektivität von T_λ^n auf $R(T_\lambda^n)$ auch $u = 0$. Somit gilt $E = N(T_\lambda^n) \oplus R(T_\lambda^n)$. Die Projektion $P : n + r \mapsto r$ von E auf $R(T_\lambda^n)$ lässt sich in der Form $(T_\lambda^n|_{R(T_\lambda^n)})^{-1} T_\lambda^n$ schreiben, ist also stetig. Für $x = n + r$ mit $n \in N(T_\lambda^n)$ und $r \in R(T_\lambda^n)$ gilt nun $\|x\| = \|n + r\| \leq \|n\| + \|r\| \leq \|(1 - P)x\| + \|Px\| \leq c\|x\| + c_0\|x\| = \text{const} \cdot \|x\|$, was die behauptete Äquivalenz der Normen zeigt. □

Satz 5.3.9. *Sei E normiert und $T \in K(E)$. Sei $\lambda \neq 0$ ein Eigenwert von T (also auch von T' (siehe Proposition 5.3.6 (c))). Dann gilt:*

- (i) $\dim N(T_\lambda) = \dim N(T'_\lambda) < \infty$
- (ii) $R(T_\lambda) = {}^\circ N(T'_\lambda)$, oder anders gesagt: Es gibt eine Lösung x von $(\lambda - T)x = y \Leftrightarrow$ für jedes $\varphi \in E'$ mit $T'\varphi = \lambda\varphi$ gilt: $\varphi(y) = 0$.
- (iii) $R(T'_\lambda) = N(T_\lambda)^\circ$, oder anders gesagt: Es gibt eine Lösung φ von $(\lambda - T')\varphi = \psi \Leftrightarrow$ für jedes $x \in E$ mit $Tx = \lambda x$ gilt: $\psi(x) = 0$.

Beweis.

- (i) Eigenräume kompakter Operatoren zu einem Eigenwert $\lambda \neq 0$ sind stets endlich-dimensional (da T auf $N(T_\lambda)$ gleich $\lambda \cdot \text{Id}_{N(T_\lambda)}$ ist). Nach dem Lemma hat T_λ die Gestalt

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \text{ auf } E = N(T_\lambda^n) \oplus R(T_\lambda^n)$$

und T'_λ die Gestalt

$$\begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & B' \end{pmatrix} \text{ auf } N(T'_\lambda) \oplus R(T'_\lambda) \cong E'$$

Da B und folglich auch B' invertierbar ist, gilt $\dim N(T_\lambda) = \dim N(A) = \dim N(A') = \dim N(T'_\lambda)$, wobei die mittlere Gleichheit aus den bekannten Tatsachen für lineare Abbildungen endlich-dimensionaler Räume folgt.

- (ii) Wie wir wissen (Korollar 2.3.10) ist $R(T_\lambda) = \overline{R(T_\lambda)} = {}^\circ N(T'_\lambda)$.
- (iii) $R(T'_\lambda) \subset N(T_\lambda)^\circ$ folgt aus $\langle T'_\lambda \varphi, n \rangle = \langle \varphi, T_\lambda n \rangle = \langle \varphi, 0 \rangle = 0$, wobei $\varphi \in E', n \in N(T_\lambda)$. Sei nun $\psi \in N(T_\lambda)^\circ$. Durch $\dot{\psi}(x+N(T_\lambda)) := \psi(x)$ wird auf $E/N(T_\lambda)$ ein stetiges lineares Funktional $\dot{\psi}$ definiert. Aus Lemma 5.3.2 wissen wir, daß $\dot{x} \mapsto T_\lambda x$ ein bi-stetiger Isomorphismus von $E/N(T_\lambda)$ auf $R(T_\lambda)$ ist. Also ist das Funktional $f : T_\lambda x \mapsto \dot{\psi}(\dot{x}) = \psi(x)$ auf $R(T_\lambda)$ stetig, d.h. es gibt ein $C > 0$ mit $|f(T_\lambda x)| = |\psi(x)| \leq C \|T_\lambda x\|, \forall x \in E$. Nach Hahn-Banach lässt sich f zu einem $\varphi \in E'$ fortsetzen. Da $(T'_\lambda)(x) = \varphi(T_\lambda x) = f(T_\lambda x) = \psi(x)$ für $x \in E$, gilt $T'_\lambda \varphi = \psi$, also $\psi \in R(T_\lambda)$

□

5.4 Übungen, Beispiele, Ergänzungen

Übung 5.4.1. Sind A und B normiert und ist $V = A \oplus B$ mit der Summennorm $\|(a, b)\| = \|a\| + \|b\|$, so ist V' isometrisch isomorph zu $A' \oplus B'$ mit der Maximumsnorm $\|(\chi, \psi)\| = \max\{\|\chi\|, \|\psi\|\}$ vermöge der Abbildung $\varphi \mapsto (\varphi|_A, \varphi|_B)$.

Übung 5.4.2. Auf $L^2([0, 1])$ betrachte man den durch das unbestimmte Integral gegebenen Operator

$$J : f \mapsto (x \mapsto \int_0^x f(t) dt).$$

Man zeige, daß J kompakt ist und bestimme seine Spektralzerlegung.

Übung 5.4.3. Das Quadrat $[0, 1] \times [0, 1]$ sei mit dem zweidimensionalen Lebesguemaß versehen und $t \in L^2([0, 1] \times [0, 1])$. Sei $T \in B(L^2([0, 1]))$ definiert durch

$$Tf(x) = \int_0^1 t(x, y) f(y) dy \text{ für } x \in [0, 1].$$

Man zeige, daß T kompakt ist.