Kapitel 4

Spektraltheorie

4.1 Grundbegriffe

Sei A eine Algebra, über $\mathbb{K}$ d.h. ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ mit einer Abbildung ("Multiplikation") $(a, b) \mapsto ab$ von $A \times A$ nach A, die bilinear ist und das Assoziativitätsgesetz $(ab)c = a(bc)$ erfüllt. Ein Element $\mathbf{e} \in A$ heißt Eins oder Eins-Element der Algebra A, wenn $\mathbf{e}a = a\mathbf{e} = a$ für alle $a \in A$ gilt. Das Eins-Element (sofern es existiert) ist eindeutig bestimmt. Im Folgenden sei vorausgesetzt, daß A eine Eins besitzt. Ist $a \in A$, so heißt b Inverses zu a, wenn $ba = ab = \mathbf{e}$ gilt. Das Inverse zu a (sofern es exisitiert) ist eindeutig bestimmt und wird mit a^{-1} bezeichnet. Ist $\mu \in \mathbb{K}$ und $\mathbf{e}$ die Eins von A, so schreiben wir für $\mu\mathbf{e}$ auch kurz μ.

Das Spektrum eines Elements einer Algebra

Definition 4.1.1. *Sei $a \in A$. Die Menge*

$$\rho(a) := \{\lambda \in \mathbb{K} \mid (\lambda - a)^{-1} \textit{existiert}\}$$

heißt die **Resolventenmenge** von a, ihr Komplement

$$\sigma(a) := \mathbb{K} \setminus \rho(a)$$

heißt das **Spektrum** von a

Bemerkung. Resolventenmenge und Spektrum hängen von der zugrundegelegeten Algebra A ab.

Beispiel 4.1.2. *Sei A die Algebra der Polynome auf dem Intervall $[0, 1]$, B die Algebra der stetigen Funktionen auf $[0, 1]$, beide mit punktweise definierten Operationen, und sei a die Funktion $a(x) = x$. Es gilt $a \in A \subset B$. Das Spektrum von a in A ist ganz $\mathbb{K}$, da das Polynom $f(x) = \lambda - x$ für kein λ in A invertierbar ist. Dagegen ist das Spektrum von a in B gerade $[0, 1]$, denn als stetige Funktion* *lässt sich* $f(x) = \lambda - x$ *genau dann invertieren, wenn* f *überall auf* $[0, 1]$ *von Null verschieden ist, d.h. wenn* $\lambda \notin [0, 1]$ *ist.*

Das Spektrum eines Operators

Ist E ein normierter Raum und A die Algebra $B(E)$ mit der Eins $\mathbf{e} = \mathrm{Id}_E$, so unterteilt man das Spektrum von $T \in B(E)$ wie folgt:

$$\sigma_p(T) := \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \text{ es gibt } x \neq 0 \in E \text{ mit } (\lambda - T)x = 0\}$$

heißt das **Punktspektrum** von T,

$$\sigma_c(T) := \{\lambda \in \sigma(T) \mid (\lambda - T) \text{ ist injektiv, } \overline{(\lambda - T)E} = E\}$$

heißt das **kontinuierliche Spektrum** von T (die Einschränkung $\lambda \in \sigma(T)$ bei der Definition von $\sigma_c(T)$ ist nötig, weil sonst $\rho(T)$ in $\sigma_c(T)$ enthalten wäre);

$$\begin{aligned}\sigma_r(T) &:= \sigma(T) \setminus (\sigma_p(T) \cup \sigma_c(T)) \\ &= \{\lambda \in \mathbb{K} \mid (\lambda - T) \text{ ist injektiv, } (\lambda - T)E \text{ ist nicht dicht in } E\}\end{aligned}$$

heißt das **Restspektrum** oder **Residualspektrum** von T. Offenbar ist $\sigma(T)$ disjunkte Vereinigung von $\sigma_p(T), \sigma_c(T)$ und $\sigma_r(T)$.

Man definitert außerdem ein **approximatives Punktspektrum**

$$\sigma_a T := \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \forall \varepsilon > 0 \, \exists x \text{ mit } \|x\| = 1 \text{ und } \|(\lambda - T)x\| < \varepsilon\}.$$

Es gilt $\sigma_a(T) \subset \sigma(T)$, denn ist $S \in B(E)$ invertierbar in $B(E)$, so folgt aus der Stetigkeit von S^{-1} die Existenz einer Konstanten $C > 0$ mit $\|Sx\| \geq C\|x\|$, insbesondere $\|Sx\| \geq c$ für alle x mit $\|x\| = 1$; Anwendung auf $S = \lambda - T$ zeigt also, dass $\lambda - T$ für $\lambda \in \sigma_a(T)$ nicht invertierbar ist und somit $\sigma_a(T) \subset \sigma(T)$ gilt.

Die Algebra $B(E)$ ist mit der Operatornorm ein normierter Raum und es gilt $\|TS\| \leq \|T\| \, \|S\|$, d.h. $B(E)$ ist eine **normierte Algebra**. Ist E ein Banachraum, so ist $B(E)$ eine **Banachalgebra**, d.h. eine normierte Algebra, die (als normierter Raum) vollständig ist. Für die Eins $\mathbf{e} = \mathrm{Id}_E$ von $B(E)$ gilt $\|\mathbf{e}\| = 1$.

Invertierbare Elemente

Im Folgenden sei A eine Banachalgebra mit Eins.

Proposition 4.1.3 (geometrische oder Neumannsche Reihe)**.** . *Ist* $a \in A$ *mit* $\|a\| < 1$*, so ist* $\mathbf{e} - a$ *in* A *invertrierbar und es gilt*

$$(\mathbf{e} - a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \qquad \text{(wobei } a^0 = \mathbf{e} = \text{ Eins von } A\text{)}$$

Beweis. Wegen $\|a\| < 1$ konvergiert die Reihe $\sum_0^\infty a^n$ absolut, und es gilt

$$(\mathbf{e}-a)\sum_{n=0}^{\infty}a^n=\sum_{n=0}^{\infty}a^n-\sum_{n=1}^{\infty}a^n=\mathbf{e},$$

ebenso $(\sum_0^\infty a^n)(\mathbf{e}-a)=1$. Also existiert $(\mathbf{e}-a)^{-1}$ und ist gleich $\sum_0^\infty a^n$. □

Satz 4.1.4. *Sei $a \in A$ invertierbar, $b \in A$ mit $\|a-b\| < \|a^{-1}\|^{-1}$. Dann ist b invertierbar und $b^{-1}=\sum_0^\infty [a^{-1}(a-b)]^n a^{-1}$, wobei die Reihe absolut konvergiert.*

Beweis. Es ist

$$b=a-(a-b)=a(\mathbf{e}-a^{-1}(a-b))$$

Da $\|a^{-1}(a-b)\| \leq \|a^{-1}\|\,\|a-b\| < 1$, ist nach Proposition oben

$$(\mathbf{e}-a^{-1}(a-b))^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(a^{-1}(a-b)]^n, \quad \text{also}$$

$$b^{-1}=\sum_0^\infty [a^{-1}(a-b)]^n a^{-1}$$

□

Korollar 4.1.5. *(a) Die Menge $Inv(A)$ der invertierbaren Elemente von A ist offen.*

(b) Die Abbildung $a \mapsto a^{-1}$ von $Inv(A)$ auf sich ist stetig.

(c) $\rho(a)$ ist offen (für jedes $a \in A$).

(d) Die **Resolvente** *$\mathcal{R}_\lambda(a) := (\lambda - a)^{-1}$ ist als Funktion von λ in $\rho(a)$ analytisch (d.h. sie lässt sich lokal als absolut konvergente Potenzreihe $\sum_0^\infty b_n(\lambda-\lambda_0)^n$ mit $b_n \in A$ darstellen).*

(e) Für $|\lambda| > \|a\|$ gilt $\lambda \in \rho(a)$ und $\|\mathcal{R}_\lambda(a)\| \leq \frac{1}{|\lambda|-\|a\|}$.

(f) $\sigma(a)$ ist kompakt.

Beweis. (a) ist wegen Satz 4.1.4 klar.

(b) Es gilt

$$b^{-1}-a^{-1}=\sum_1^\infty [a^{-1}(a-b)]^n a^{-1},$$

so daß

$$\|b^{-1}-a^{-1}\| \leq \sum_1^\infty (\|a^{-1} \mid \|a-b\|)^n \|a^{-1}\|$$

gegen Null geht, wenn $\|a-b\|$ gegen Null geht.

(c) Ist $\lambda \in \rho(a)$ und $K_r(\lambda - a)$ eine Kugel um $\lambda - a$, die noch ganz in $Inv(A)$ liegt (was nach (a) für genügend kleines r der Fall ist), so gilt für $\mu \in \mathbb{K}$ mit $|\lambda - \mu| < \frac{r}{\|\mathbf{e}\|}$ wegen $\|(\lambda - a) - (\mu - a)\| = |\lambda - \mu| \, \|\mathbf{e}\| < r$, dass $\mu - a$ invertierbar ist, μ also zu $\rho(a)$ gehört.

(d) Sei $\lambda_0 \in \rho(a)$. Nach Satz 4.1.4 gilt für λ mit $|\lambda - \lambda_0| < \|(\lambda_0 - a)^{-1}\|^{-1}$:

$$\mathcal{R}_\lambda(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{R}_{\lambda_0}^{n+1}(a)(\lambda_0 - \lambda)^n.$$

Diese Reihe ist wegen $\|\mathcal{R}_{\lambda_0}^{n+1}(a)(\lambda_0 - \lambda)^n\| \leq \|\mathcal{R}_{\lambda_0}(a)\| \, \|\mathcal{R}_{\lambda_0}(a)\|^n \cdot |\lambda_0 - \lambda|^n$ für die angegebenen λ absolut konvergent.

(e) Für $|\lambda| > \|a\|$ gilt $\lambda - a = \lambda(\mathbf{e} - \frac{a}{\lambda})$ und $\|\frac{a}{\lambda}\| < 1$, also $(\lambda - a)^{-1} = \lambda^{-1} \sum_0^\infty (\frac{a}{\lambda})^n$

□

Proposition 4.1.6. *Sei B eine Banachalgebra mit Eins und A eine abgeschlossene Unteralgebra von B, welche die Eins von B enthält. Für $b \in A$ gilt*

(i) $\sigma_B(b) \subset \sigma_A(b)$

(ii) $\partial\sigma_A(b) \subset \partial\sigma_B(b)$.

Beweis. (i) ist wegen $A \subset B$ klar.

(ii) Sei $\lambda \notin \partial\sigma_B(b)$. Ist $\lambda \in \partial\sigma_A(b)$, so gibt es $\lambda_n \in \rho_A(b) \subset \rho_B(b)$ mit $\lambda_n \to \lambda$. Wegen $\lambda \notin \partial\sigma_B(b)$ muss λ in $\rho_B(b)$ liegen. Da die Inversion stetig ist, ist also

$$C = \sup_n \|(\lambda_n - b)^{-1}\|_B < \infty.$$

Es gilt

$$\lambda - b = \lambda - \lambda_n + \lambda_n - b = (\lambda_n - b)[(\lambda - \lambda_n)(\lambda_n - b)^{-1} + \mathbf{e})]$$

und für $|\lambda - \lambda_n| < \frac{1}{2C}$:

$$\|(\lambda - \lambda_n)(\lambda_n - b)^{-1}\|_A = \|(\lambda - \lambda_n)(\lambda_n - b)^{-1}\|_B \leq \frac{1}{2C} \cdot C < 1.$$

Also ist $\mathbf{e} + (\lambda - \lambda_n)(\lambda_n - b)^{-1}$ nach Proposition 4.1.3 in A invertierbar und, wegen $\lambda_n \in \rho_A(b)$, auch $\lambda - b$. Somit $\lambda \notin \sigma_A(b) \supset \partial\sigma_A(b)$, was $\lambda \in \partial\sigma_A(b)$ widerspricht.

□

4.2 Der Spektralradius

Im Folgenden sei wieder A eine Banachalgebra mit Eins und es gelte $\|a\| = 1$. In diesem Abschnitt führen wir das Konzept des Spektralradius ein und beweisen zwei wichtige Sätze, den Satz von Gelfand und den Satz von Gelfand-Mazur.

Definition 4.2.1. *Für $a \in A$ heißt*

$$r(a) := \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$$

der **Spektralradius** *von a.*

Bemerkung. Der Spektralradius $r(a)$ ist wohldefiniert, d.h. der Grenzwert $r(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$ existiert.

Beweis. Wir zeigen nun, dass $\lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$ existiert. Ist $k \in \mathbb{N}$, so lässt sich jedes $n \in \mathbb{N}$ in der Form $n = p_n k + q_n$ mit $0 \leq q_n < k$ schreiben. Wegen $\frac{q_n}{n} \to 0$, $\frac{p_n}{n} \to \frac{1}{k}$ erhalten wir

$$\|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \|a^{p_n k}\|^{\frac{1}{n}} \|a^{q_n}\|^{\frac{1}{n}} \leq \|a^k\|^{\frac{p_n}{n}} \|a\|^{\frac{q_n}{n}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \|a^k\|^{\frac{1}{k}}.$$

Also gilt

$$\limsup_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \|a^k\|^{\frac{1}{k}}$$

für jedes $k \in \mathbb{N}$ und somit

$$\limsup_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \liminf_{k\to\infty} \|a^k\|^{\frac{1}{k}}.$$

Hieraus folgt die Existenz von $\lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$. □

Charakterisierung des Spektralradius

Satz 4.2.2 (Gelfand)**.** *Sei A eine komplexe Banachalgebra mit Eins, und sei $a \in A$. Dann ist $\sigma(a)$ nicht leer und es gilt*

$$r(a) = sup\{\, |\lambda| \mid \lambda \in \sigma(a)\,\} =: r_\sigma(a).$$

Beweis. (i) Sei $\sigma(a) = \emptyset$. Dann ist $\mathcal{R}_\lambda(a)$ und damit auch $\lambda \mapsto < \mathcal{R}_\lambda(a), f >= f \circ \mathcal{R}_\lambda(a)$ (wobei $f \in A'$ beliebig) nach Korollar 4.1.5 (d) oben analytisch auf ganz $\mathbb{C}$ und ausserdem wegen 4.1.5 (e) beschränkt. Nach dem Satz von Liouville ist $f \circ \mathcal{R}_\lambda(a)$ konstant, also wegen (e) gleich Null. Nach dem Satz von Hahn-Banach muss dann $\mathcal{R}_\lambda(a)$ null sein. Das liefert $0 = \mathcal{R}_\lambda(a)(\lambda - a) = 1$, ein Widerspruch. Also ist $\sigma(a)$ nicht leer.

(ii) Wir zeigen $r_\sigma(a) \leq r(a)$. Sei $|\lambda| > r(a)$. Für s, t mit $|\lambda| > s > t > r(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\|a_n\|^{\frac{1}{n}} < t$$

für $n > n_0$. Die Reihe $\sum_0^\infty (\frac{a}{\lambda})$ ist also wegen $\|(\frac{a}{\lambda})^n\| = \frac{\|a^n\|}{|\lambda|^n} < \frac{t^n}{s^n}$ (für $n > n_0$) und $\frac{t}{s} < 1$ absolut konvergent. Wie in Korollar 4.1.5 (e) oben folgt $\lambda \in \rho(a)$ (sowie $\mathcal{R}_\lambda(a) = \sum_0^\infty \lambda^{-n-1} a^n$), also $\lambda \in \sigma(a)$. Somit gilt $|\lambda| \leq r(a)$ für alle $\lambda \in \sigma(a)$. Die Reihe für $\mathcal{R}_\lambda(a)$ konvergiert übrigens für $|\lambda| \geq s > r(a)$ gleichmäßig und absolut.

(iii) Wir zeigen $r_\sigma(a) \geq r(a)$. Wegen der in (ii) gewonnenen Darstellung von $\mathcal{R}_\lambda(a)$ für $|\lambda| > r(a)$ und $\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\lambda|=s} \lambda^n d\lambda = \delta_{-1,n}$ für $n \in \mathbb{Z}$ (gewöhnliches komplexes Integral, elementar auszurechnen) erhalten wir für $s > r(a)$ und $k \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\lambda|=s} \lambda^k \mathcal{R}_\lambda(a) d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\lambda|=s} (\sum_0^\infty \lambda^{k-n-1} a^n) d\lambda = a^k.$$

Da die Resolvente nach (ii) sogar für alle λ mit $|\lambda| > r_\sigma(a)$ existiert und, wie wir wissen, überall, wo sie definiert ist, auch analytisch ist, gilt die soeben bewiesene Gleichung auch für beliebiges $s > r_\sigma(a)$: Ist $s' > s > r_\sigma(a)$, so ergibt sich

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\lambda|=s} \lambda^k \mathcal{R}_\lambda(a) d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\lambda|=s'} \lambda^k \mathcal{R}_\lambda(a) d\lambda$$

nach dem Cauchyschen Integralsatz, da der Integrand im Gebiet zwischen den beiden Integrationswegen holomorph ist. (Genauer: Wendet man ein beliebiges $f \in A'$ auf die A-wertigen Integrale an, erhält man mit dem Cauchyschen Integralsatz Gleichheit der nun komplexwertigen Integrale. Und schließt nun mit Hahn-Banach auf die Gleichheit der A-wertigen Integrale.) Also gilt die obige Gleichung für beliebiges $s > r_\sigma(a)$. Wir schätzen ab:

$$\|a^k\| \leq \frac{1}{2\pi} s^k \cdot \sup_{|\lambda|=s} \|\mathcal{R}_\lambda(a)\| \cdot 2\pi s = \text{const } s^{k+1}.$$

Hieraus folgt $\|a^k\|^{\frac{1}{k}} \leq \text{const}^{\frac{1}{k}} \cdot s^{1+\frac{1}{k}} \to s$, also

$$r(a) = \lim_{k\to\infty} \|a\|^{\frac{1}{k}} \leq s.$$

Da dies für alle $s > r_\sigma(a)$ richtig ist, erhalten wir $r(a) \leq r_\sigma(a)$.

□

Dieser Satz, der für nicht vollständige normierte Algebren falsch ist, illustriert, welche erstaunlichen Konsequenzen Vollständigkeit haben kann. Grob gesprochen ist die linke Seite der in Satz 4.2.2 behaupteten Gleichung topologisch definiert, die rechte algebraisch.

Korollar 4.2.3. *In einer komplexen, normierten Algebra mit Eins hat jedes Element nichtleeres Spektrum.*

Beweis. Ist A eine normierte Algebra so ist die Vervollständigung $\hat{A}$ eine Banachalgebra. Für $a \in A$ gilt: $\sigma_A(a) \supset \sigma_{\hat{A}}(a) \neq \emptyset$ (nach Satz 4.2.2). □

Satz von Gelfand-Mazur

Definition 4.2.4. *Seien A, B Algebren über $\mathbb{K}$. Eine Abbildung $f : A \to B$ heißt* **(Algebren-) Homomorphismus** *von a nach B, wenn f linear ist und $F(ab) = f(a)f(b)$ gilt. Ist f außerdem bijektiv, so heißt f* **(Algebren-) Isomorphismus** *und A und B heißen zueinender isomorph.*

Satz 4.2.5 (Gelfand- Mazur)**.** *Sei A eine komplexe normierte Divisionsalgebra, d.h. eine normierte Algebra über $\mathbb{C}$, in der jedes von Null verschiedene Element invertierbar ist. Dann ist A bistetig isomorph zu $\mathbb{C}$.*

Beweis. Sei $a \in A$. Nach Korollar 4.2.3 ist $\sigma(a)$ nicht leer. Sei $\lambda \in \sigma(a)$, also $\lambda - a$ nicht invertierbar. Nach Voraussetzung muss dann $\lambda - a = 0$ sein, also $a = \lambda \cdot \mathbf{e}$ (wo $\mathbf{e}$ die Eins der Algebra ist). Die Abbildung $\lambda \mapsto \lambda \cdot \mathbf{e}$ ist offenbar ein injektiver Algebrenhomorphismus von $\mathbb{C}$ nach A, und die Überlegung zu Beginn zeigt die Surjektivität. Es gilt $\|\lambda \cdot \mathbf{e}\| = |\lambda| \cdot \|\mathbf{e}\|$, also ist die Abbildung bistetig, im Fall $\|\mathbf{e}\| = 1$ isometrisch, womit die Behauptung bewiesen ist. □

4.3 Gelfandsche Darstellungstheorie

Sei A eine Algebra mit Eins.

Definition 4.3.1. *Ein* **Ideal** *von A ist ein linearer Teilraum I mit der Eigenschaft $aI \subset I$ und $Ib \subset I$ für allle $a, b \in A$. Das Ideal I heißt* **maxima**l*, wenn gilt: Ist J ein Ideal mit $I \subset J$, so folgt $J = I$ oder $J = A$. Ein Ideal I heißt* **echt***, wenn $I \neq A$ gilt.*

Bemerkung.

(i) Ist I ein Ideal in A, so ist der **Faktorraum** $A/I := \{a + I | a \in A\}$ mit den Definitionen $\lambda(a + I) := \lambda a + I, (a + I) + (b + I) := (a + b) + I$, $(a + I) \cdot (b + I) := ab + I$ eine Algebra. Die Abbildung $a \mapsto a + I$ ist ein Algebrenhomomorphismus von A auf A/I, bei dem die Eins von A auf die Eins von A/I übergeht. Ist I ein maximales Ideal in A, so besitzt A/I keine Ideale ausser 0 und A/I. Wenn zusätzlich A/I kommutativ ist, ist dies gleichbedeutend damit, dass jedes von Null verschiedene Element in A/I ein Inverses besitzt.

(ii) Ist A eine Banachalgebra und I ein abgeschlossenes Ideal von A, so ist A/I mit der Quotientennorm $\|a+I\|_0 = \inf_{i \in I} \|a+i\|$ eine Banachalgebra, denn wie wir schon wissen, ist A/I ein Banachraum, und aus

$$\|(a + i)(b + j)\| \leq \|a + i\|\|b + j\|$$

folgt für $i, j \in I$

$$\|ab + I\|_0 = \|(a + i)(b + j) + I\|_0 \leq \|(a + i)(b + j)\| \leq \|a + i\|\|b + j\|,$$

also auch

$$\|ab + I\|_0 \leq \inf_{i \in I} \|a + i\| \inf_{j \in I} \|b + j\| = \|a + Ik\|_0 \|b + I\|_0.$$

Das Spektrum einer Banachalgebra

Definition 4.3.2. *Ist A eine komplexe Banachalgebra mit Eins* $\mathbf{e}$*, so heißt*

$$X(A) := \{\,\varphi : A \to \mathbb{C} \mid \varphi(\mathbf{e}) = 1, \varphi \textit{ Algebrenhomomorphismus}\}$$

das **Spektrum** *(auch:* **Gelfandraum***) von A. Für $x \in A$ und $\varphi \in X(A)$ setze $\hat{x}(\varphi) := \varphi(x)$. Die Abbildung $x \mapsto \hat{x}$ heißt* **Gelfandtransformation**.

Für die Elemente von $X(A)$, multiplikative lineare Funktionale, wird keine Stetigkeit vorausgesetzt. Der folgende Satz zeigt unter anderem, daß sie stetig sind und Norm ≤ 1 haben.

Satz 4.3.3 (Gelfandscher Darstellungssatz)**.** *Sei A eine kommutative Banachalgebra mit Eins. Im folgenden sei $X(A)$ stets mit der schwach* -Topologie versehen. Dann gilt:*

(a) $X(A) \subset A'_1$ (Einheitskugel des Dualraumes von A) und $X(A)$ ist schwach* kompakt.

(b) Die Gelfandtransformation $x \mapsto \hat{x}$ ist ein Algebrenhomomorphismus von A nach $C(X(A))$ (Algebra der stetigen Funktionen auf $X(A)$).

(c) Für $x \in A$ gilt

$$\sigma(x) = \{\,\varphi(x) \mid \varphi \in X(A)\},$$

also

$$\|\hat{x}\|_\infty = \sup_{\varphi \in X(A)} |\hat{x}(\varphi)| = \sup_{\lambda \in \sigma(x)} |\lambda| = r(x) \leq \|x\|,$$

(d) $\hat{A} = \{\,\hat{x} \mid x \in A\}$ **trennt Punkte** *von $X(A)$, d.h. zu $\varphi \neq \psi \in X(A)$gibt es $a \in A$ mit $\hat{a}(\varphi) \neq \hat{a}(\psi)$.*

(e) Wird A von einem Element f und dem Einselement $\mathbf{e}$ *erzeugt, d.h. ist die kleinste abgeschlossene Unteralgebra, die f und* $\mathbf{e}$ *enthält, gleich A selbst, so ist $\sigma(f)$ als Teilmenge von $\mathbb{C}$ zu $X(A)$ homöomorph durch die Zuordnung $\varphi(f) \leftrightarrow \varphi$. Identifiziert man $X(A)$ mit $\sigma(f)$ vermöge dieser Homomorphie, so führt die Abbildung $a \mapsto \hat{a}$ das Element f in die identische Abbildung von $\sigma(f)$ und das Element* $\mathbf{e}$ *in die konstante Funktion* $\mathbf{1}$ *auf $\sigma(f)$ über.*

Beweis. (a) Für $x \in A$ und $\varphi \in X(A)$ gilt

$$\varphi(\varphi(x) \cdot \mathbf{e} - x) = \varphi(x)\varphi(\mathbf{e}) - \varphi(x) = 0.$$

Deshalb ist $\varphi(x) - x$ nicht invertierbar (denn für jedes invertierbare $a \in A$ gilt

$$\varphi(a)\varphi(a^{-1}) = \varphi(\mathbf{e}) = 1,$$

also $\varphi(a) \neq 0$) und somit $\varphi(x) \in \sigma(x)$. Hieraus folgt $|\varphi(x)| \leq \|x\|$, also ist φ beschränkt und hat Norm ≤ 1.

Ist $\{\varphi_\mu\}$ ein Netz in $X(A)$, das schwach* gegen $\varphi \in A'_1$ konvergiert, so gilt

$$\varphi(ab) = \lim \varphi_\mu(ab) = \lim(\varphi_\mu(a)\varphi_\mu(b)) = \lim \varphi_\mu(a) \cdot \lim \varphi_\mu(b) = \varphi(a)\varphi(b)$$

und

$$\varphi(\mathbf{e}) = \lim \varphi_\mu(\mathbf{e}) = 1,$$

also ist $X(A)$ in A'_1 schwach*-abgeschlossen, und somit, (da A'_1 schwach*-kompakt ist) auch schwach* -kompakt.

(b) folgt unmittelbar aus den Definitionen.

(c) Wie schon unter (a) gezeigt, gilt $\{\,\varphi(x) \mid \varphi \in X(A)\} \subset \sigma(x)$. Sei nun $\lambda \in \sigma(x)$. Dann ist $\lambda - x$ nicht invertierbar, also $I = A(\lambda - x)$ ein echtes Ideal von A. Nach dem Lemma von Zorn gibt es ein echtes maximales Ideal $M \supset I$.

Da jedes $a \in A$ mit $\|a - \mathbf{e}\| < 1$ invertierbar ist (siehe geometrische Reihe4.1.3), also in keinem echten Ideal liegen kann, ist M und damit auch $\overline{M}$ im Komplement der offenen Menge $K_1(\mathbf{e})$ enthalten. Da M maximal und $\overline{M} \neq A$ ist, folgt $M = \overline{M}$.

Nach der Bemerkung 4.3.1 ist dann A/M eine **Banach-Divisionsalgebra**, d.h. eine Banachalgebra (da M abgeschlossen), in der jedes von Null verschiedene Element invertierbar ist (da M maximal, A/M kommutativ).

Nach dem Satz von Gelfand-Mazur 4.2.5 gibt es einen isometrischen Isomorphismus j von A/M auf $\mathbb{C}$. Sei p die kanonische Projektion $a \mapsto a + M$ von A auf A/M . Dann ist $\psi = j \circ p$ ein Algebrenhomorphismus von A nach $\mathbb{C}$ mit $\psi(\mathbf{e}) = 1$. Da $\lambda - x \in I \subset M$, gilt $\psi(\lambda - x) \in \psi(M) = j \circ p(M) = 0$, also $\psi(x) = \psi(\lambda) = \lambda\psi(\mathbf{e}) = \lambda$. Damit ist auch die Inklusion $\sigma(x) \subset \{\,\varphi(x) \mid \varphi \in X(A))\}$ gezeigt, also die Gleichheit dieser Mengen. Der Rest von (c) folgt hieraus unmittelbar.

(d) Gilt $\varphi(a) = \psi(a)$ für alle $a \in A$, so ist $\varphi = \psi$.

(e) Nach (c) ist die Abbildung $\varphi \mapsto \varphi(f)$ von $X(A)$ nach $\sigma(f)$ surjektiv, und sie ist offensichtlich stetig (nach Definition der schwach*-Topologie). Wir zeigen die Injektivität. Sei $\varphi(f) = \psi(f)$. Dann gilt auch für alle Polynome

$$P(f) = a_n f^n + \ldots + a_1 f + a_0 \cdot \mathbf{e} \text{ (wobei } a_i \in \mathbb{C}\text{):}$$

$$\varphi(P(f)) = \psi(P(f)).$$

Aus Stetigkeitsgründen müssen φ und ψ auf dem Abschluss der Menge $\{\,P(f) \mid P \text{ ein Polynom}\}$ übereinstimmen (das ist aber die kleinste abgeschlossene Unteralgebra, die f und $\mathbf{e}$ enthält), also nach Voraussetzung auf ganz A gleich sein, d.h. es muss $\varphi = \psi$ gelten. Damit ist die Injektivität von $\varphi \mapsto \varphi(f)$ gezeigt. Als stetige bijektive Abbildung zwischen zwei kompakten Hausdorffräumen muss nun $\varphi \mapsto \varphi(f)$ ein Homomorphismus sein. Identifizieren wir durch diese Abbildung $X(A)$ mit $\sigma(f)$, so nimmt $\hat{f}$ in $\varphi(f)$ (was

$\varphi \in X(A)$ entspricht) den Wert $f(\varphi) = \varphi(f)$ an, d.h. $\hat{f}$ ist die Identität auf $\sigma(f)$. Dass $\hat{\mathbf{e}}$ gerade die konstante Funktion 1 ist, ist klar, denn $\varphi(\mathbf{e}1) = 1$ für alle $\varphi \in X(A)$.

$\square$

C^*-Algebren

Definition 4.3.4. *Sei A eine komplexe Algebra. Eine* **Involution** *ist eine Abbildung $a \mapsto a^*$ von A nach A mit den Eigenschaften*

(i) $(\lambda a)^* = \overline{\lambda} a^*$

(ii) $(a+b)^* = a^* + b^*$

(iii) $(ab)^* = b^* a^*$

(iv) $(a^*)^* = a$.

Eine Algebra mit Involution heißt ***-Algebra** *oder* **involutive Algebra***, im Fall einer Banachalgebra auch* **Banach-*-Algebra***.*

Bemerkung. Aus (iv) folgt, daß jede Involution bijektiv ist. Besitzt A eine Einse, so gilt $\mathbf{e}^* = \mathbf{e}$, da die Eins einer Algebra eindeutig bestimmt ist.

Beispiele 4.3.5. *(a) $A = \mathcal{C}([0,1])$ mit Involution $f \mapsto \overline{f}$ (Komplexkonjugation).*

(b) $A = B(H)$, wo H ein Hilbertraum, mit der Involution $T \mapsto T^*$, die jedem Operator seinen adjungierten Operator zuordnet.

In beiden Beispielen gilt übrigens

$$\|a^*a\| = \|a\|^2 \text{ für alle } x \in A.$$

Definition 4.3.6. *Eine Banachalgebra mit einer Involution, die $\|a^*a\| = \|a\|^2$ erfüllt, heißt* **C^*-Algebra***.*

Satz 4.3.7. *Sei A eine C^*-Algebra (bei (i) und (iv) mit Eins $\mathbf{e}$) und sei $a \in A$. Es gelten:*

(i) $\|\mathbf{e}\| = 1$

(ii) $\|a^*\| = \|a\|$

(iii) Ist a normal (d.h. $a^*a = aa^*$), so gilt $\|a^{2^k}\| = \|a\|^{2^k}$, für $k \in \mathbb{N}$, folglich auch $r(a) = \|a\|$.

(iv) Ist a selbstadjungiert (d.h. $a^* = a$), so gilt $\sigma(a) \subset \mathbb{R}$. (Elemente mit $a^* = a$ werden auch hermitesch genannt.)

(v) Für $\varphi \in X(A)$ gilt $\varphi(a^*) = \overline{\varphi(a)}$.

Beweis. (i) $\|\mathbf{e}\|^2 = \|\mathbf{e}^*\mathbf{e}\| = \|\mathbf{e}\| \neq 0$, also $\|\mathbf{e}\| = 1$. (Der Trivialfall $A = \{0\}$ sei ausgeschlossen)

(ii) $\|a\|^2 = \|a^*a\| \leq \|a*\|\|a\|$, also $\|a\| \leq \|a^*\|$, folglich auch (ersetze a durch a^*) $\|a^*\| \leq \|a^{**}\| = \|a\|$. Somit gilt $\|a\| = \|a^*\|$.

(iii) sei a normal. Es gilt $\|a^2\|^2 = \|(a^2)^*(a^2)\| = \|(a^*a)(a^*a)\| = \|a^*a\|^2 = \|a\|^4$, also $\|a^2\| = \|a\|^2$, d. h. die Behauptung trifft für $k = 1$ zu. Anwendung auf a^{2^k} (das auch normal ist) liefert $\|(a^{2^k})^2\| = \|a^{2^k}\|^2$. Gilt die Behauptung für k so ist $\|a^{2^k}\|^2 = (\|a\|^{2^k})^2$, womit wir $\|a^{2^{k+1}}\| = \|a\|^{2^{k+1}}$ erhalten, d. h. die Behauptung gilt auch für $k{+}1$. Es folgt $r(a) = \lim \|a^k\|^{\frac{1}{k}} = \lim \|a^{2^k}\|^{\frac{1}{2^k}} = \|a\|$.

(iv) Sei $a = a^*$ und $\lambda = \alpha + i\beta \in \sigma(a)$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Für $t \in \mathbb{R}$ gilt dann $\alpha + i(\beta + t) = \lambda + it \in \sigma(a + it)$, folglich $\alpha^2 + (\beta + t)^2 = |\alpha + i(\beta + t)|^2 \leq \|a + it\|^2 = \|(a + it)^*(a + it)\| = \|a^2 + t^2\mathbf{e}\| \leq \|a^2\| + t^2$, also $\alpha^2 + \beta^2 + 2\beta t \leq \|\alpha^2\|$. Da $t \in \mathbb{R}$ beliebig war, folgt $\beta = 0$, d. h. $\lambda \in \mathbb{R}$.

(v) Für $x = x^* \in A$ gilt wegen $\varphi(x) \in \sigma(x)$ (4.3.3 (c)) und (iv) $\varphi(x) \in \mathbb{R}$. Ein beliebiges $a \in A$ lässt sich $a = x + iy$ mit $x = x^*$ und $y = y^*$ schreiben (nämlich $x = \frac{a+a^*}{2}$, $y = \frac{a-a^*}{2i}$). Folglich gilt $\varphi(a^*) = \varphi(x - iy) = \varphi(x) - i\varphi(y) = \overline{\varphi(x) + i\varphi(y)} = \overline{\varphi(a)}$, für jedes $\varphi(X)$.

□

Für späteren Gebrauch sei noch folgender Satz bereitgestellt.

Satz 4.3.8 (Vertauschungssatz)**.** *Sei A eine C^*-Algebra, $x, u \in A$ mit $xu = ux$, wobei x normal ist. Dann gilt auch $x^*u = ux^*$.*

Beweis. (i) Für $a \in A$ sei

$$\exp a := \sum_0^\infty \frac{1}{n!} a^n.$$

Wie in der Analysis zeigt man $\exp a + b = \exp a \exp b$, falls $ab = ba$ gilt, und außerdem $(\exp a)^* = \exp a^*$, da die Involution stetig ist. Für **antihermitesches** h (d.h. $h^* = -h$) gilt

$$\exp h(\exp h)^* = \exp(h - h) = \mathbf{e} \text{ und } (\exp h)^* \exp h = \mathbf{e},$$

Also

$$(\exp h)^* = (\exp h)^{-1},$$

d.h. $\exp h$ ist unitär und folglich

$$\|\exp h\|^2 = \|(\exp h)^* \exp h\| = \|\mathbf{e}\| = 1.$$

(ii) Nach Voraussetzung gilt $ux = xu$, also

$$(\exp x)u = u \exp x \text{ oder } u = (\exp -x)u \exp x.$$

Multiplikation von links und rechts mit $\exp x^*$ bzw. $\exp -x^*$ liefert

$$(\exp x^*)u(\exp -x^*) = \exp(x^* - x)u \exp(-(x^* - x)),$$

da x normal ist, ist $\exp(x^* - x)$ unitär, folglich

$$\|(\exp x^*)u(\exp -x^*)\| \leq \|u\|.$$

Ersetzt man nun x durch $\overline{z}x$, wo $z \in \mathbb{C}$, so ist

$$f(z) = \exp(zx^*)u \exp(-zx^*)$$

eine ganze (A-wertige) Funktion, die durch $\|u\|$ auf ganz $\mathbb{C}$ beschränkt ist. Nach dem Satz von Liouville also konstant ist, $f(z) = f(0) = u$. Somit gilt

$$\exp(zx^*)\, u = u \, \exp(zx^*).$$

Schreibt man dies als Gleichung von Potenzreihen, subtrahiert u, teilt durch z und bildet den Limes für $z \to 0$, so ergibt sich

$$x^* u = ux^*.$$

$\square$

Satz von Gelfand-Naimark

Um den Satz von Gelfand-Naimark beweisen zu können, benötigen wir noch den Satz von Stone-Weierstraß.

Satz 4.3.9 (Satz von Stone-Weierstraß)**.** *Sei X ein kompakter Raum. $A \subset \mathcal{C}(X)$ eine Algebra mit folgenden Eigenschaften*

(i) A ist invariant unter Komplexkonjugation, d.h. für $a \in A$ ist $\overline{a} \in A$.

(ii) A trennt Punkte von X, d.h. zu $x \neq y \in X$ gibt es $a \in A$ mit $a(x) \neq a(y)$.

(iii) A verschwindet nirgends, d.h. zu $x \in X$ gibt es $a \in A$ mit $a(x) \neq 0$.

Dann ist A dicht in $(\mathcal{C}(X), \| \ \|_\infty)$.

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß $B = \{\, a \in A]; |\, \overline{a} = a\}$ $(=: \Re A)$ dicht in $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(X)$ ist. B ist eine Algebra reeller Funktionen, die ebenfalls (ii) und (iii) erfüllt.

(a) Für $b \in B$ lässt sich $|b|$ durch Elemente von B approximieren. Denn: ist $\|b\|_\infty \leq C$ und sind p_n, $n \in \mathbb{N}$ Polynome mit $p_n(t) \to |t|$ gleichmäßig auf $[-C, C]$ (solche Polynome gibt es nach dem Satz von Weierstraß), so folgt $p_n(f) \to |f|$ gleichmäßig auf X. Wegen $f \vee g = \frac{1}{2}(f+g) + \frac{1}{2}|f+g|$ und $f \wedge g = \frac{1}{2}(f+g) - \frac{1}{2}|f-g|$ lassen sich auch Maximum und Minimum zweier Funktionen aus B durch Elemente aus B approximieren.

(b) Sei $f \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(X)$. Zunächst zeigen wir, daß es zu $s, t \in X$ ein $f_{s,t} \in B$ mit $f_{s,t} = f$ auf $\{s, t\}$ gibt. Für $s = t$, wenn also nur übereinstimmung in einem Punkt verlangt wird, dann ist das wegen (iii) trivial. Für $s \neq t$ gibt es nach (ii) ein $a \in B$ mit $a(s) \neq a(t)$, wobei wir außerdem $a(s), b(s) \neq 0$ annehmen können (Ist z.B. $a(t) = 0$, so addiere man eine Funktion $b \in B$ mit $b(t) \neq 0$ und $\|b\|_\infty < a(s)$). Eine geeignete Linearkombination von a und a^2 leistet nun das Gewünschte, denn $(a(s), a(t))$ und $(a^2(s), a^2(t))$ sind linear unabhängig.

(c) Ist $\varepsilon > 0$ und $s \in X$ fest, so gibt es wegen $f_{s,t}(t) = f(t)$ und der Stetigkeit von f und $f_{s,t}(t)$ zu jedem $t \in X$ eine Umgebung U_t mit $f_{s,t} > f - \varepsilon$ auf U_t. Endlich viele $U_{t_1}, \ldots, U_{t_n}$ überdecken X, denn X ist kompakt. Für

$$f_s := f_{s,t_1} \vee \ldots \vee f_{s,t_n}$$

gilt dann $f_s > f - \varepsilon$ auf ganz X. Zu jedem $s \in X$ gibt es wegen $f_s(s) = f(s)$ eine Umgebung V_s mit $f_s < f + \varepsilon$ auf V_s. Endlich viele $V_{s_1}, \ldots, V_{s_l}$ überdecken X. Die Funktion

$$g = f_{s_1} \wedge \ldots \wedge f_{s_l}$$

efüllt nun $g < f + \epsilon$ und $g > f - \varepsilon$ auf X, also $\|f - g\|_\infty < \varepsilon$. Da $f \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(X)$ beliebig war und g durch Elemente von B approximiert werden kann, ist B dicht in $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(X)$ und somit A dicht in $\mathcal{C}(X)$, wie behauptet.

□

Bemerkung. Der Satz von Stone-Weierstraß lässt sich leicht auf lokal kompaktes X (jeder Punkt hat eine kompakt Umgebung) erweitern. Ersetzt man im schon bewiesenen Satz "kompakt" durch "Lokal kompakt" und $\mathcal{C}(X)$ durch $\mathcal{C}_0(X)$, so bleibt er richtig. Dabei ist $\mathcal{C}_0(X)$ die Algebra der im Unendlichen verschwindenden Funktionen ($f : X \mapsto \mathbb{C}$ **"verschwindet im Unendlichen"**, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein kompaktes $K \subset X$ gibt mit $|f| < \varepsilon$ außerhalb K gibt).

Beweis der Bemerkung.. (a) 1-Punkt Kompaktifizierung von X:
Man fügt einen neuen Punkt zu X hinzu, z.B. "∞". $\tilde{X} = X \cup \{\infty\}$ ist kompakt, wenn man zur Topologie von X alle Mengen $M \subset \tilde{X}$ mit $\infty \in M$ als offen hinzufügt, deren Komplement $\tilde{X} \setminus M$ kompakt in X ist.

(b) Indem wir alle $f \in \mathcal{C}_0(X)$ durch $f(\infty) = 0$ stetig auf $\tilde{X}$ fortsetzen und Konstanten addieren erhalten wir alle stetigen Funktionen auf $\tilde{X}$: $\mathcal{C}(X) = \mathbb{C} \cup \mathcal{C}_0(X)$. Die Algebra $\mathbb{C} + A$ anstelle von A erfüllt dann (i)–(iii) des vorgehenden Satzes, ist also dicht in $\mathcal{C}(X) = \mathbb{C} \cup \mathcal{C}_0(X)$. Hieraus folgt, daß A dicht in $\mathcal{C}_0(X)$, denn $\lambda_n + f_n \to \lambda + f$ impliziert $\lambda_n \to \lambda$ und $f_n \to f$.

□

Satz 4.3.10 (Gelfand-Naimark)**.** *Ist A eine kommutative C^* -Algebra mit Eins* **e***, so ist die Abbildung $a \mapsto \widehat{a}$ ein isometrischer Algebrenisomorohismus von A auf $\mathcal{C}(X(A))$ und außerdem gilt $\widehat{a^*} = \overline{\widehat{a}}$.*

Beweis. Wie wir wissen, trennt $\widehat{A} = \{\widehat{a} \mid a \in A\}$ Punkte von $X(A)$ und verschwindet nirgends (denn $\mathbf{e}(\varphi) = 1$ für jedes φ). Außerdem gilt $\widehat{a^*}(\varphi) = \varphi(a^*) = \overline{\varphi(a)} = \widehat{a}(\varphi)$, $\widehat{A}$ ist also invariant unter Komplexkonjugation. Nach dem Satz von Stone-Weierstrass muss dann $\widehat{A}$ dicht in $\mathcal{C}(X(A))$ sein. Wie in den Übungen4.6.1 gezeigt, gilt für jedes a mit $aa^* = a^*a$ (was hier wegen Kommutativität von A stets erfüllt ist) in einer C^*-algebra die Gleichheit $\|a\| = \lim_{n\to\infty} \|a_n\|^{\frac{1}{n}}$, und da nach dem Gelfandschen Darstellungssatz 4.3.3 $\|a\|_\infty = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$ gilt, erhalten wir $\|\widehat{a}\|_\infty = \|a\|$, die Abbildung $a \mapsto \widehat{a}$ ist also isometrisch. Da A vollständig ist, ist es dann auch $\widehat{A}$, folglich ist $\widehat{A}$ abgeschlossen in $\mathcal{C}(X(A))$, und da $\widehat{A}$ dicht in $\mathcal{C}(X(A))$ ist, muss $A = \mathcal{C}(X(A))$ gelten. □

Definition 4.3.11. *Seien A, B $*$-Algebren. Ein Algebren homomorphismus (bzw. Algebrenisomorphismus) $S : A \to B$ heißt* **$*$-Algebrenhomomorphismus** *(Bzw. $*$-Algebrenisomorphismus) oder kurz $*$-Homomorphismus (bzw.* **$*$-Isomorphismus***), wenn S mit der Involution verträglich ist, also $(Sa)^* = S(a^*)$ für alle $a \in A$ gilt.*

Somit sagt Satz 4.3.10 für eine kommutative $\mathcal{C}^*$- Algebra A mit Eins, daß die Gelfandtransformation ein isometrischer $*$-Isomorphismus von A auf $\mathcal{C}(X(A))$ ist.

Stetiger Funktionalkalkül

Für den folgenden Funktionalkalkül benötigen wir eine Verschärfung von Proposition 4.1.6

Satz 4.3.12. *Sei B eine $\mathcal{C}^*$-Algebra mit Eins* $\mathbf{e}$ *und $A \subset B$ eine $\mathcal{C}^*$-Unteralgebra mit* $\mathbf{e} \in A$*. Dann gilt $\sigma_A(a) = \sigma_B(a)$ für alle $a \in A$.*

Beweis. (i) Für selbstadjungiertes $a \in A$ gilt nach Proposition 4.3.7 (iv) $\sigma_A(a) \subset \mathbb{R}$, also $\partial\sigma_A(a) = \sigma_A(a)$ (denn der Rand ist im Grundraum $\mathbb{C}$ zu nehmen). Aus Proposition 4.1.6 folgt $\sigma_A(a) = \sigma_B(a)$.

(ii) Sei nun $a \in A$ beliebig und $\lambda \in \mathbb{C}$. Ist $\lambda - a$ in A invertierbar, so auch $\overline{\lambda} - a^*$, und somit $(\lambda - a)(\overline{\lambda} - a^*)$ und $(\overline{\lambda} - a^*)(\lambda - a)$. Sind umgekehrt beide Produkte invertierbar, so hat $\lambda - a$ ein Rechtsinverses und ein Linksinverses (die wegen der Assoziativität des Produkts gleich sein müssen), und ist also invertierbar. Die Produkte haben aber die Form $|\lambda|^2 - c$ und $|\lambda|^2 - d$ mit selbstadjungierten c und d in A. Nach (i) sind diese Differenzen (und damit $\lambda - a$) genau dann in A invertierbar, wenn sie es in B sind. Somit gilt $\sigma_A(a) = \sigma_B(a)$.

□

Im folgenden bezeichne $\mathbf{t}$ die identische Funktion $\mathbf{t}(s) = s$, für $s \in \sigma(b)$ und $\mathbf{1}$ die konstante Funktion mit Wert 1 auf $\sigma(b)$.

Satz 4.3.13 (Stetiger Funktionalkalkül für selbstadjungierte Elemente einer $\mathcal{C}^*$-Algebra)**.** *Sei B eine $\mathcal{C}^*$- Algebra mit Eins* $\mathbf{e}$*, und sei $b = b^* \in B$. Es gibt genau einen stetigen Homomorphismus*

$$\Phi_b : \mathcal{C}(\sigma(b)) \to B \ mit \ \Phi_b(\mathbf{1}) = \mathbf{e}, \ \Phi_b(\mathbf{t}) = b$$

Definition 4.3.14. *Man nennt Φ den* **stetigen Funktionalkalkül** *und bezeichnet $\Phi_b(f)$ mit $f(b)$, was durch die Tatsache motiviert ist, daß $\Phi_b(p) = p(b)$ für jedes Polynom p gilt und aus $p_n \to f$, wegen der Stetigkeit von Φ auch $p_n(b) \to \Phi_b(f)$ folgt. (Damit ist auch schon klar, daß Φ_b eindeutig bestimmt ist.)*

Satz 4.3.15 (Fortsetzung von Satz 4.3.13)**.** *Es gelten*

(a) $\|f(b)\| = \|f\|_\infty$ $(= \sup_{\lambda \in \sigma(b)} |f(\lambda)|)$,

(b) $f(b)^* = \overline{f(b)}$*, insbesondere*

(c) $f(b)^* = f(b) \iff f$ *ist reellwertig ,*

(d) Alle $f(b)$, $f \in \mathcal{C}(\sigma(b))$, sind normal ($f(b)^* f(b) = f(b) f(b)^*$)

(e) $\sigma(f(b)) = f(\sigma(b))$.

(f) Falls $B = B(H)$, wo H ein Hilbertraum ist gilt außerdem

- *(i) Für $g \geq 0, g \in \mathcal{C}(\sigma(b))$ ist $g(b)$ ein positiver Operator (d.h. $(\, g(b)x \mid x) \geq 0 \ \forall x \in H$.*
- *(ii) Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ und $b\,x = \lambda x$ für ein $x \in H$, so folgt $g(b)x = g(\lambda)x$, für alle $g \in \mathcal{C}(\sigma(b))$.*

Beweis der Sätze 4.3.13 und 4.3.15.. (i) Zur Existenz und Eindeutigkeit von Φ_b. Sei A die von $\mathbf{e}$ und b erzeugte Unteralgebra von B. Die algebraisch von $\mathbf{e}$ und b erzeugte Algebra A_0 besteht aus den Polynomen $p(b) = \sum_{k=0}^n \alpha_k b^k$, $\alpha_k \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, wobei b^0 für $\mathbf{e}$ steht. A_0 ist offensichtlich kommutativ und wegen $B^* = b$ auch $*$-invariant. Der Abschluß A ist also eine kommutative $\mathcal{C}^*$-Algebra. Wenn wir gmäß 4.3.3 (e) $X(A)$ vermöge der Abbildung $\varphi \mapsto \varphi(b)$ idenzifizieren, so ist wegen Satz 4.3.10 die Gelfandtransformation $\mathcal{G} : a \mapsto \widehat{a}$ ein isometrischer $*$-Isomorphismus von A auf $\mathcal{C}(\sigma(b))$ mit $\widehat{\mathbf{e}} = \mathbf{1}$, $\widehat{b} = \mathrm{Id}_{\sigma(b)} =: \mathbf{t}$, also $\mathcal{G}^{-1}$ ein isometrischer $*$-Isomorphismus von $\mathcal{C}(\sigma(b))$ auf $A \subset B$. Damit ist die Existenz von Φ_b gezeigt. Da Φ_b ein Algebrenmorphismus ist, ist es auf A_0 eindeutig bestimmt und wegen seiner Stetigkeit auch auf dem Abschluß A.

(ii) Wegen $f(b) = \Phi_b(f) = \mathcal{G}^{-1}(f)$ sind die Eigenschaften (a)–(c) offenbar erfüllt, ebenso (d), da A eine kommutative $\mathcal{C}^*$-Algebra ist. Aus 4.3.3 (c) und (e) wissen wir für ein $a \in A$, daß $\sigma(a) = \widehat{a}(\sigma(b))$ gilt, also $\sigma(f(b)) = \widehat{f(b)}(\sigma(b)) = \mathcal{G} \circ \mathcal{G}^{-1}(f)(\sigma(b)) = f(\sigma(b))$, wie in (e) behauptet.

(iii) Sei nun $B = B(H)$. Für $g \in \mathcal{C}(\sigma(b))^+$ (d.h. $g \in \mathcal{C}(\sigma(b))$ und $g \geq 0$) und $x \in H$ gilt wegen $g = g^{\frac{1}{2}} g^{\frac{1}{2}}$ und (c) $(g(b)x|x) = (g^{\frac{1}{2}} g^{\frac{1}{2}} x|x) = (g^{\frac{1}{2}} x|g^{\frac{1}{2}} x) \geq 0$, also gilt (f)(i). Ist $b\,x = \lambda x$ für ein $x \in H$, so folgt $p(b)x = p(\lambda)x$ für alle Polynome p, also aus Stetigkeitsgründen auch $g(b)x = g\lambda)x$, für alle $g \in \mathcal{C}(\sigma(b))$, d.h. (f)(ii) gilt.

□

Der Funktionalkalkül für normale Elemente bedarf nur einer leichten Modifikation des selbstadjungierten Falls.

Wir benötigen folgendes Analogon zu Satz 4.3.3 (e).

Proposition 4.3.16. *Sei B eine $\mathcal{C}^*$-Algebra mit Eins $\mathbf{e}$, sei $b \in B$ normal und A die von $\mathbf{e}$, b, b^* erzeugte abgeschlossene Unteralgebra von B. Dann ist A eine kommutative $\mathcal{C}^*$-Algebra und $\varphi \mapsto \varphi(b)$ ein Homöomorphismus von $X(A)$ und $\sigma(b)$. Identifiziert man $X(A)$ und $\sigma(b)$ vermöge dieser Abbildung, so gilt $\widehat{\mathbf{e}} = \mathbf{1}$, $\widehat{b} = \mathbf{t} = \mathrm{Id}_{\sigma(b)}$, $\widehat{b^*} = \overline{\mathbf{t}} = \overline{\mathrm{Id}_\sigma b}$.*

Beweis. Die von $\mathbf{e}$, b, b^* (algebraisch) erzeugte Algebra besteht aus allen Polynomen $p(b, b^*)$ (z.B. $\alpha\mathbf{e} + \alpha_2 b^* bb * + \alpha_3 bbb^* bb^* + \ldots$ eine endliche Summme). Da b normal ist, ist die Algebra kommutativ, außerdem $*$-invariant, Ihr Abschluß A also eine kommutative $\mathcal{C}^*$-Unteralgebra von B. Daß $\varphi \mapsto \varphi(b)$ ein Homöomorphismus von $X(A)$ auf $\sigma(b)$ ist, folgt nun wie im Beweis von Satz 4.3.3(e). Lediglich die Injektivität musss neu bewiesen werden. Gilt $\varphi(b) = \psi(b)$, so folgt wegen Satz 4.3.7 $\varphi(b^*) = \overline{\varphi(b)}$, $\overline{\psi(b)} = \psi(b^*)$, also folgt wegen Satz 4.3.7 $\varphi = \psi$ auf allen Polynomen $p(b, b^*)$ und somit aus Stetigkeitsgründen auf ganz A. Wieder wie im Beweis von Satz 4.3.3(e) ergibt sich nun $\widehat{\mathbf{e}} = \mathbf{1}$ und $\widehat{b} = \mathrm{Id}_{\sigma(b)}$, somit auch $\widehat{b^*} = \overline{\mathrm{Id}_{\sigma(b)}}$. □

Proposition 4.3.17. *Für normales $b \in B(H)$ und $x \in H$ gilt $\|b^* x\| = \|bx\|$. Im Fall $b\,x = \lambda x$ mit einem $\lambda \in \mathbb{C}$ folgt hieraus $b^*\,x = \overline{\lambda} x$. Eigenvektoren von b zum Eigenwert λ sind Eigenvektoren von b^* zum Eigenwert $\overline{\lambda}$.*

Beweis. Es gilt

$$\|b^* x\|^2 = (b^* x \mid b^* x) = (x \mid bb^* x) = (x \mid b^* bx) = (bx \mid bx) = \|bx\|^2.$$

Mit b ist auch $b - \lambda$ normal. Im Fall $b\,x = \lambda x$ folgt deshalb $0 = \|(b - \lambda)x\| = \|(b^* - \overline{\lambda})x\|$ also $b^* x = \overline{\lambda} x$. □

Sei wieder $\mathbf{t} = \mathrm{Id}_{\sigma(b)}$ die identische Funkton $\mathbf{t}(z) = z$ auf $\sigma(b)$ und $\mathbf{1}$ die konstante Funktion 1 auf $\sigma(b)$.

Satz 4.3.18 (Stetiger Funktionalkalkül für normale Elemente einer C^*-Algebra mit Eins.)**.** *Sei B eine C^*-Algebra mit Eins $\mathbf{e}$ und $b \in B$ normal, d.h. $b^* b = bb^*$. Es gibt genau einen stetigen Isomorphismus $\Phi_b : \mathcal{C}(\sigma(b)) \to B$ mit*

$$\Phi_b(\mathbf{1}) = \mathbf{e},\ \Phi_b(\mathbf{t}) = b,\ \Phi_b(\overline{\mathbf{t}}) = b^*.$$

Man nennt Φ_b den stetigen Funktionalkalkül von b und schreibt für $f \in \mathcal{C}(\sigma(b))$ einfach $\Phi_b(f) = f(b)$. Es gilt *(a)* $\|f(b)\| = \|f\|_\infty$,

(b) $f(b)^* = \overline{f}(b)$, *insbesondere*

(c) $f(b)^* = f(b) \Longleftrightarrow f$ *ist reellwertig .*

(d) *Alle* $f(b),\ f \in \mathcal{C}(\sigma(b))$ *sind normal*

(e) $\sigma(f(b)) = f(\sigma(b))$.

(f) *Falls* $B = B(H)$, *wo* H *ein Hilbertraum ist gilt außerdem*

  (i) *Für* $g \geq 0, g \in \mathcal{C}(\sigma(b))$ *ist* $g(b)$ *ein positiver Operator*

  (ii) *Ist* $\lambda \in \mathbb{C}$ *und* $b\,x = \lambda x$ *für ein* $x \in H$, *so folgt* $g(b)x = g(\lambda)x$, *für alle* $g \in \mathcal{C}(\sigma(b))$.

Beweis. Der Beweis verläuft wie im selbstadjungierten Fall, nur daß anstelle von Polynomen $p(t)$ mit Bild $p(b)$ nun Polynome $p(t, \overline{t})$ mit Bild $p(b, b^*)$ benutzt werden und anstelle von Satz 4.3.3 nun Proposition 4.3.16 benutzt wird. (Der Grund dafür: Im Fall $b \neq b^*$ brauchen die Polynome $p(t)$ nicht dicht in $\mathcal{C}(\sigma(b))$ zu sein.)

Zu (f)(ii): Ist $f(t) = \lim p_n(t, \overline{t})$ so folgt $f(b) = \lim p_n(b, b^*)$, also $f(b)x = \lim p_n(b, b^*)x = \lim p_n(\lambda, \overline{\lambda})x = f(\lambda)x$. □

Ein Spektralsatz für normale Operatoren auf einem Hilbertraum

Definition 4.3.19. *Sei* H *ein Hilbertraum und sei* A *eine abgeschlossene Unteralgebra von* $B(H)$, *die die Identität von* H, *das Einselement von* $B(H)$ *enthält. Ein abgeschlossener Unterraum* $U \neq \{0\}$ *von* H *heißt zyklisch für* A, *wenn es ein* $x \in H$ *gibt mit* $U = \overline{Ax}$. *Ein solches* x *heißt zyklischer Vektor.*

Ist $T \in B(H)$ selbstadjungiert, $T^* = T$, und dann ist die von Id_H und T erzeugte abgeschlossene Unteralgebra A von $B(H)$ $*$-invariant und ein für A zyklischer Unterraum U wird auch einfach zyklisch für T genannt. Ist $x \in H$ zyklisch für T so stimmen offenbar $\overline{Ax}$ und $U = \overline{\mathrm{Lin}\{x, Tx, T^2x, \dots\}}$ überein, da die Polynome in T dicht in A sind.

Ist T normal, also $TT^* = T^*T$, dann betrachtet man die von Id_H, T und T^* erzeugte abgeschlossene Unteralgebra und spricht von für T und T^* zyklischen Unteräumen. **Bemerkung.** Es ist bequem, einen für A zyklischen Unterraum U mit zyklischem Vektor $x \in H$ dann mit H_x zu bezeichnen. Offenbar ist H_x invariant unter A (d.h. $AH_x \subset H_x$), und es ist $x \in H_x$. Ist A eine $*$-abgeschlossene Unteralgebra von $B(H)$ so ist auch $H_x^\perp$ invariant unter A. Mit dem Zornschen Lemma kann man sich eine maximale Menge paarweiser orthogonaler zyklischer Unterräume H_x von H verschaffen. Sei X die Menge der entsprechenden Vektoren x aus H. Dann ist $\sum_{x \in X} H_x$ dicht in H und H ist die Hilbertraumsumme

$$H = \oplus_{x \in X} H_x := \left\{ \xi \mid \xi = \sum_{x \in X} \xi_x \text{ mit } \xi_x \in H_x, \sum_{x \in X} \|\xi_x\|^2 < \infty \right\}.$$

Diese Bemerkung zeigt:

Satz 4.3.20. *Sei H ein Hilbertraum $T \in B(H)$ normal und sei A die von T, T^* und der Identität von H erzeugte abgeschlossene Unteralgebra von $B(H)$. Es gibt eine orthonormale Menge $X \subset H$ (d.h. die Elemente von X sind von Norm 1 und paarweise orthogonal), so daß mit $H_x = \overline{Ax}$ der Raum H die direkte Hilbertraumsumme der H_x ist.*

Wegen $H_x = \overline{Ax}$ gilt $TH_x \subset H_x$, insbesondere wirkt T auf H_x wie ein gewöhnlicher Multiplikationsoperator, genauer gesagt gilt die folgende

Proposition 4.3.21. *Unter den obigen Voraussetzungem gibt es ein endliches positives Borelmaß μ_x auf $\sigma(T)$ und einen isometrischen Isomorphismus*

$$J : L^2(\sigma(T), \mu_x) \to H_x,$$

so daß

$$J^{-1}TJ = M_{\mathbf{t}}$$

ist, wobei $M_{\mathbf{t}}$ den mit der identischen Abbildung definierten Multiplikationsoperator auf $L^2(\sigma(T), \mu_x)$ bezeichnet:

$$M_{\mathbf{t}}g(y) = y \cdot g(y) \text{ für } g \in L^2(\sigma(T), \mu_x),\ y \in \sigma(T).$$

Es gilt auch

$$J^{-1}T^*J = M_{\overline{\mathbf{t}}}.$$

Beweis. Sei $R \leftrightarrow r = \mathcal{G}(R)$ (d.h. $r = \widehat{R}$)) die bijektive Zuordnung durch die Gelfandtransformation (gemäß Gelfand-Naimark 4.3.10) zwischen A und $\mathcal{C}(\sigma(T))$, wobei wir $X(A)$ mit $\sigma(T)$ gemäß 4.3.16 identifiziert haben.

Die Abbildung $p : r \mapsto (\, Rx \mid x)$ ist ein positives lineares Funktional auf $\mathcal{C}(\sigma(T))$, lässt sich also (nach dem Rieszschen Darstellungssatz aus der Maßtheorie [5, (13.33)]) in der Form

$$p(r) = (\, Rx \mid x) = \int_{\sigma(T)} r \, d\mu_x$$

schreiben, wobei μ_x ein eindeutig bestimmtes positives endliches Borel-Maß auf $\sigma(T)$ ist. Bezüglich dieses Maßes ergibt sich für die L^2-norm $\|r\|_2$ eines Elements $r \in \mathcal{C}(\sigma(T))$

$$\|r\|_2^2 = \int \overline{r} r \, d\mu_x = p(\overline{r} r) = (R^*Rx|x) = \|Rx\|^2.$$

Die Abbildung $j : r \mapsto Rx$ von $\mathcal{C}(\sigma(T))$ auf $Ax \subset H$ ist also isometrisch, außerdem linear. Da $\mathcal{C}(\sigma(T))$ bzw. Ax dicht in $L^2(\sigma(T), \mu_x)$ bzw. H_x ist, ist die stetige Fortsetzung J von j ein isometrischer Isomorphismus von $L^2(\sigma(T), \mu_x)$ auf H_x. Für $r \in \mathcal{C}(\sigma(T))$ gilt

$$J(\mathbf{t}r) = TRx = TJr, \tag{4.3.22}$$

also da $\mathcal{C}(\sigma(T))$ in $L^2(\sigma(T), \mu_x)$ dicht ist,

$$JM_{\mathbf{t}} = TJ \text{ oder } J^{-1}TJ = M_{\mathbf{t}} \tag{4.3.23}$$

wo $M_{\mathbf{t}}$ der Multiplikationsoperator $g \mapsto \mathbf{t}g$ auf $L^2(\sigma(T), \mu_x)$ ist. Da wir $X(A)$ mit $\sigma(T)$ identifiziert haben, ist nach (e) des Gelfandschen Darstellungssatzes $\mathbf{t} = \widehat{T}$ und $\overline{\mathbf{t}} = \widehat{T^*}$ mit der identischen Abbildung $\mathbf{t}(\lambda) = \lambda$ auf $\sigma(T)$ also,

$$\begin{aligned}&(M_{\mathbf{t}}g)(y) = \mathbf{t}(y)g(y) = yg(y) \text{ und}\\ &(M_{\overline{\mathbf{t}}}g)(y) = \overline{\mathbf{t}}(y)g(y) = \overline{y}g(y),\ y \in \sigma(T),\ g \in L^2(\sigma(T), \mu_x) \overset{J}{=} H_x\end{aligned} \tag{4.3.24}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. □

Bemerkung. Die Wirkung von T auf H_x entspricht der Wirkung von $M_{\mathbf{t}}$ auf $L^2(\sigma(T), \mu_x)$, hängt also von μ_x ab. Der Träger von μ_x (d.h. das Komplement der gößten offenen μ_x-Nullmenge) kann ganz $\sigma(T)$ sein, muß aber nicht.

Beispiel 4.3.25. *Ist $x \in H$ ein Eigenvektor von T zum Eigenwert λ, so gilt nach Satz 4.3.13 (f)(ii) für $r \in \mathcal{C}(\sigma(T))$; $r(T)x = r(\lambda)x$, nach Definition von μ_x*

$$\int_{\sigma(T)} r\, d\mu_x = (\, Rx \mid x) = (\, r(T)x \mid x) = r(\lambda)\|x\|^2.$$

Somit ist $\mu_x = \|x\|^2\delta_\lambda$, wo δ_λ das Dirac-Maß im Punkt λ, also $\sigma(T) \setminus \{\lambda\}$ eine μ_x-Nullmenge ist. Zwei Funktionen auf $\sigma(T)$ sind genau dann äquivalent, wenn sie an der Stelle λ denselben Funktionswert annehmen. $L^2(\sigma(T), \mu_x)$ ist also 1-dimensional (wie es auch sein muß , denn es ist zu dem 1-dimensionalen Raum $H_x = \overline{Ax} = \mathbb{C}$ isomorph).

Da das Maß μ_x passend zu H_x konstruiert wurde, also von $x \in X$ abhängt, bezeichnen wir es mit μ_x . Nach Konstruktion (Satz 4.3.20) gilt

$$H \cong \bigoplus_{x \in X} L^2(\sigma(T), \mu_x)$$

oder, wenn wir mit μ das Maß $\sum_{x \in X} \mu_x$ auf den Borelmengen von $\coprod_{x \in X} \sigma(T)$ bezeichnen, $H \cong L^2(\mu)$ (isometrische Isomorphie). Hier bezeichnet $\coprod_{x \in X} \sigma(T)$ die disjunkte Vereinigung von Kopien von $\sigma(T)$. Somit ergibt sich

Satz 4.3.26 (Spektralsatz I für normale Operatoren)**.** *Es gibt einen isometrischen Isomorphismus von H auf $L^2(\mu)$, der T in den Multiplikationsoperator mit der Funktion $\mathbf{t}(y) = y$ transformiert.*

Bemerkung. Hier erscheinen im allgemeinen mehrere (viele) Kopieen von $\sigma(T)$ und die Funktion $\mathbf{t}$ ist auf jeder dieser Kopieen die Identität. Der Beweis des Spektralsatzes liefert auch eine simultane "Diagonalisierung" aller Operatoren $S \in A$. Ersetzt man nämlich in 4.3.22 und 4.3.23 T und t durch S und $s := \widehat{S}$, so ergibt sich $J^{-1}SJ = M_s$ (der durch Multiplikation mit s definierte Operator), für $S \in A$. Identifizert man $L^2(\mu)$ mit H vermöge J (und somit $B(H)$ mit

$B(L^2(\mu))$ vermöge $S \mapsto J^{-1}SJ$), so ist der Homomorphismus $S \mapsto M_s$ gerade der stetige Funktionalkalkül von $T \triangleq M_t$).

Natürlich kann man L^2-Funktionen auch mit beschränkten meßbaren Funktionen multiplizieren, d.h. der Spektralsatz impliziert die Existenz des Borel-meßbaren Funktionalkalküls.

Satz 4.3.27 (Borelscher Funktionalkalkül). *Sei H ein Hilbertraum, $T \in B(H)$ normal, und sei $\mathcal{B}_b(\sigma(T))$ die Banachalgebra der beschränkten Borelschen (= Borel-meßbaren) Funktionen auf $\sigma(T)$ mit der Supremumsnorm $\|\,.\,\|_\infty$. Dann gibt es genau einen stetigen Homomorphismus $\tilde{\Phi}_T : \mathcal{B}_b(\sigma(T)) \to B(H)$ mit*

(1) $\tilde{\Phi}_T(\mathbf{1}) = \mathrm{Id}_H$, $\tilde{\Phi}_T(\mathbf{t}) = T$, $\tilde{\Phi}_T(\overline{\mathbf{t}}) = T^*$, wo $\mathbf{t}$ die identische Funktion $\mathbf{t}(s) = s$ auf $\sigma(T)$ ist.

(2) Sind $f_n \in \mathcal{B}_b(\sigma(T))$ mit $\sup_n \|f_n\|_\infty =: C < \infty$ und $f_n \to f$ punktweise auf $\sigma(T)$, so folgt $(\tilde{\Phi}_T(f_n)x|y) \to (\tilde{\Phi}_T(f)x|y)\ \forall x, y \in H$.

Man nennt $\tilde{\Phi}_T$ den Borelschen Funktionalkalkül von T und bezeichnet $\tilde{\Phi}_T(f)$ mit $f(T)$ für $f \in \mathcal{B}_b(\sigma(T))$. Es ist klar, daß $\tilde{\Phi}_T$ eine Fortsetzung des stetigen Funktionalkalküls Φ aus 4.3.18 ist.

Satz 4.3.28 (Fortsetzung von 4.3.27). *Es gelten*

(a) $\|f(T)\| \le \|f\|_\infty$ $(= \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |f(\lambda)|)$,

(b) $f(T)^* = \overline{f}(T)$, insbesondere

(c) $f(T)^* = f(T)$ für reellwertiges f.

(d) Alle $f(T), f \in \mathcal{B}_b(\sigma(T))$ sind normal $(f(T)^*f(T) = f(T)f(T)^*)$,

(e) $\sigma(f(T)) \subset \overline{f(\sigma(T))}$ (Hier bezeichnet $\overline{f(\sigma(T))}$ den topologischen Abschluß von $f(\sigma(T))$.)

(f) (i) Für $g \ge 0$, $g \in \mathcal{B}_b(\sigma(T))$ ist $g(T)$ ein positiver Operator.

(ii) Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ und $Tx = \lambda x$ für ein $x \in H$, so folgt $g(T)x = g(\lambda)x$, $\forall g \in \mathcal{B}_b(\sigma(T))$.

Beweis. Eindeutigkeit: Nach Satz 4.3.14 ist $\tilde{\Phi}_T$ auf $\mathcal{C}(\sigma(T))$ durch die Voraussetzungen (ohne (2)) eindeutig bestimmt. Um die Eindeutigkeit von $\tilde{\Phi}_T$ auf ganz $\mathcal{B}_b(\sigma(T))$ zu erhalten, genügt es die Eindeutigkeit von $\tilde{\Phi}_T$ auf den charakteristischen Funktionen Borelscher Mengen zu zeigen, denn dies impliziert die Eindeutigkeit auf ihren Linearkombinationen, den Borelschen Treppenfunktionen, woraus wegen (2) die Eindeutigkeit von $\tilde{\Phi}_T$ auf ganz $\mathcal{B}_b(\sigma(T))$ folgt, denn zu jedem $f \in \mathcal{B}_b(\sigma(T))$ gibt es eine Folge von Treppenfunktionen f_n, die (sogar gleichmäßig) gegen f konvergiert.

Sei Σ das System aller Borelschen Teilmengen B von $\sigma(T)$, für die $\tilde{\Phi}_T(\chi_B)$ eindeutig bestimmt ist. Ist $O \subset \sigma(T)$ (relativ) offen, so gibt es $f_n \in \mathcal{C}(\sigma(T))$

mit $0 \leq f_n \leq 1$ und $f_n(t) \to \chi_B(t)$, $\forall t \in \sigma(T)$, so daß wegen (2) $O \in \Sigma$ folgt. Sind $E, F \in \Sigma$, so gilt wegen $\chi_{E\cup F} = \chi_E \chi_F$ und $\chi_{\sigma(T)\setminus F} = \mathbf{1} - \chi_F$ auch $E \cup F$, $\sigma(T) \setminus E \in \Sigma$, da $\tilde{\Phi}_T$ linear und multiplikativ ist. Sind $F_k \in \Sigma$, $k \in \mathbb{N}$, paarweise disjunkt, so gilt $\chi_{\cup_1^\infty F_k} = \lim_n \sum_1^n \chi_{F_k}$, woraus wegen (2) $\chi_{\cup_1^\infty F_k} \in \Sigma$ folgt. Somit ist Σ eine σ-Algebra, die alle offenen Mengen von $\sigma(T)$ und folglich die Borelmengen von $\sigma(T)$ enthält.

Existenz: Identifiziert man wie in den Zeilen vor diesem Satz $B(H)$ mit $B(L^2(\mu))$ vermöge $S \mapsto J^{-1}SJ$, so erfüllt der Homomorphismus $s \mapsto M_s$ das Verlangte: er bildet $\mathbf{1}$ auf Id_H ab sowie $\mathbf{t}$ auf $M_{\mathbf{t}} \cong T$, $\bar{\mathbf{t}}$ auf $M_{\bar{\mathbf{t}}} \cong T^*$ ab und liefert bei (2) für $x \in L^2(\mu) \cong H$ wegen $|f_n x| \leq C|x|$ und $f_n x \to fx$ für $x \in L^2(\mu)$ aufgrund des Lebesgueschen Satzes von der dominierten Konvergenz die stärkere Schlußfolgerung $\|M_{f_n}x - M_f x\| \to 0$, $\forall x \in L^2(\mu)$.

Eigenschaften: (a) folgt aus $\|fx\|_2 \leq \|f\|_\infty \|x\|_2$, $\forall x \in L^2(\mu)$, (b) und somit auch (c) aus $(fx|y) = \int fx\overline{y}\,d\mu = \int x\overline{\overline{f}y}\,d\mu = (x|\overline{f}y)$, (d) aus der Kommutativität von $\mathcal{B}_b(\sigma(T))$, (e) aus der Tatsache, daß $\overline{f(\sigma(T))} = \sigma_{\mathcal{B}_b}(f)$ gilt (Übung4.6.6) und das Spektrum eines Elements bei einem unitalen Homomorphismus höchstens kleiner werden (oder gleich bleiben) kann. (f)(i) zeigt man wie beim stetigen Funktionalkalkül. Zu (f)(ii): Ist $Ty = \lambda y$, $y \neq 0$ und $y = \sum y_x$ mit $y_n \neq 0$, $y_x \in H$, $\|y\|^2 = \sum \|y_x\|^2$, so muss für jedes dieser y_x $Ty_x = \lambda y_x$ gelten, also $\mathbf{t}y_x = \lambda y_x$ μ_x-fastüberall, also $(\mathbf{t} - \lambda)y = 0$ μ_x − fast überall. Da $\mathbf{t} - \lambda$ auf $\sigma(T) \setminus \{\lambda\}$ ungleich null ist, muss $\{y_x \neq 0\} \setminus \{\lambda\}$ eine μ_x-Nullmenge sein. Da $\|y_x\|_2 \neq 0$, müssen $y_x(\lambda) \neq 0$ und $\mu_x(\{\lambda\}) > 0$ gelten, wir können also $y_x = y_x(\lambda)\chi_{\{\lambda\}}$ annehmen. Für $g \in \mathcal{B}_b(\sigma(T))$ folgt $gy_x = g(\lambda)y_x(\lambda)\chi_{\{\lambda\}} = g(\lambda)y_x$. Insgesamt ergibt sich also $gx = \sum_x g(\lambda)y_x = g(\lambda)x$. □

Bemerkung. Möcht man die oben benutzte Identifikation J von $L^2(\mu)$ mit dem (isometrisch isomorphen) Hilbertraum H und folglich von $B(H)$ mit $B(L^2(\mu))$ vermöge $S \mapsto J^{-1}SJ$ nicht nutzen, sondern auf dem ursprünglichen Hilbertraum H bleiben, muss man lediglich mit J^{-1} bzw. $S \mapsto JSJ^{-1}$ zurücktransformieren. Es gilt dann $\tilde{\Phi}_T(F) = JM_f J^{-1}$ für $f \in \mathcal{B}_b(\sigma(T))$. Die Eigenschaften (a)–(f) bleiben sämtlich erhalten.

4.4 Integration bezüglich einem Spektralmaß

Zur Vorbereitung des zweiten Spektralsatzes benötigen wir den Begriff des Spektralmaßes.

Definition 4.4.1. *Sei $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra auf einer nichtleeren Menge Δ und sei H ein Hilbertraum. Eine Abbildung $E : A \mapsto E(A)$ von $\mathfrak{A}$ in die Menge der orthogonalen Projektoren von H heißt ein ($B(H)$-) Projektormaß oder ($B(H)$-)* **Spektralmaß** *auf $(\Delta, \mathfrak{A})$, wenn gilt:*

(a)

$$E(\emptyset) = 0,\ E(\Delta) = \mathrm{Id}_H$$

(b)

$$E(A \cap B) = E(A)E(B) \, \forall A, B \in \mathfrak{A}$$

(c) für ein Folge von paarweise disjunkte $A_n \in \mathfrak{A}$ gilt

$$E(\cup_1^\infty A_n) = \sum_1^\infty E(A_n)$$

im Sinn der schwachen (äquivalent der starken) Konvergenz von Operatoren.

Man kann zeigen, daß (b) ein Folge von (a) und (c) ist, siehe Übung 4.6.7. Gilt für ein $A \in \mathfrak{A}$: $E(A) = \mathrm{Id}_H$ (also $E(\Delta \setminus A) = 0$), so sagt man A **trägt** E (oder E **wird von** A **getragen**).

Ist Δ ein toplogischer Raum und $\mathfrak{A}$ die σ-Algebra der Borelschen Mengen von Δ, wird E auch als Borelsches Projektormaß bzw. als **Borelsches Spektralmaß** auf Δ bezeichnet.

Beispiel und Definition 4.4.2. *Ist $T \in B(H)$ normal, $\Delta = \sigma(T)$ und $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ die σ-Algebra der Borelmengen, so ist nach dem letzten Satz 4.3.27 $E : A \mapsto \tilde{\Phi}(\chi_A) = \chi_A(T)$ wegen $\chi_A^2 = \chi_A = \overline{\chi_A}$ ein Spektralmaß auf $\Delta, \mathfrak{A}$. Man nennt es das zu T gehörige Spektralmaß oder kurz* **Spektralmaß von** T.

Analog wie bei skalaren Maßen lässt sich auch bei Spektralmaßen ein Integral für beschränkte $\mathfrak{A}$-messbare Funktionen definieren. Sind Δ, $\mathfrak{A}\, H$, E wie in Definition 4.4.1 und ist $g = \sum_1^n \alpha_i \chi_{A_i}$, wo $\alpha_i \in \mathbb{C}$, $A_i \in \mathfrak{A}$, eine $\mathfrak{A}$-Treppenfunktion auf Δ, so ist das elementare Integral

$$\mathrm{I}g := \sum_1^n \alpha_i E(A_i) \in B(H)$$

wohldefiniert, also von der gewählten Darstellung von g als $\mathfrak{A}$-Treppenfunktion unabhängig, und außerdem linear sowie wegen $(E(A)E(B) = E(A \cap B))$ auch multiplikativ. Ferner gilt

$$(\mathrm{I}g)^* = \sum_1^n \overline{\alpha}_i E(A_i) = \mathrm{I}(\sum_1^n \overline{\alpha}_i \chi_{A_i}) = \mathrm{I}(\overline{g}).$$

Somit ist $\mathrm{I} : g \mapsto \mathrm{I}g$ ein$*$-Homomorphismus. Ist $x \in H$ und $\sum_1^n \alpha_i \chi_{A_i}$ eine Darstellung von g mit paarweise disjunkten A_i, so ergibt sich

$$\begin{aligned}\|(\mathrm{I}g)x\|^2 &= \|\sum_1^n \alpha_i E(A_i)x\|^2 = \sum_1^n |\alpha_i|^2 \|E(A_i)x\|^2 \le (\sup_i |\alpha_i|^2) \sum_1^n \|E(A_i)x\|^2 \\ &= \|g\|_\infty \sum_1^n \|E(A_i)x\|^2 = \|g\|_\infty \|E(\cup_1^n A_i)x\|^2 \le \|g\|_\infty \|x\|^2\end{aligned}$$

(dabei zweimal den Satz von Pythagoras benutzt), also

$$\|\mathrm{I}g\| \leq \|g\|_\infty.$$

Da die $\mathfrak{A}$-Treppenfunktionen bezüglich $\| \ \|_\infty$ dicht in den beschränkten $\mathfrak{A}$-messbaren Funktionen $\mathcal{A}_b$ liegen, lässt sich I stetig auf $\mathcal{A}_b$ fortsetzen. Die Fortsetzung sei mit

$$\int . \, dE : f \mapsto \int f \, dE \quad (\text{oder } \int f(\lambda) \, dE(\lambda), \int_\Delta f \, dE)$$

bezeichnet, sie ist dann ein stetiger $*$-Homomorphismus von $\mathcal{A}_b$ nach $B(H)$ mit Norm ≤ 1. Es gilt $\int \mathbf{1} \, dE = \int \chi_\Delta \, dE = E(\Delta) = \mathrm{Id}_H$, d.h. der Homomorphismus ist unital.

Satz 4.4.3. *Sei H ein Hilbertraum Und E ein $B(H)$-Spektralmaßauf $(\Delta, \mathfrak{A})$, wie in Definition 4.4.1, und sei $(\mathcal{A}_b, \| \, . \, \|_\infty)$ die Banach-Algebra der beschränkten $\mathfrak{A}$-messbaren Funktionen auf Δ. Es gilt:*

(a) Das Integral $f \mapsto \int f \, dE$ von $\mathcal{A}_b$ nach $B(H)$ ist ein unitaler $*$-Homomorphismus mit Norm ≤ 1. Insbesondere ist $\int f \, dE$ für reelles f selbstadjungiert und für $f \geq 0$ ein positiver Operator.

(b) Für $x, y \in H$ ist die Abbildung $A \mapsto (E_A x \mid y)$ von $\mathfrak{A}$ nach $\mathbb{C}$, wegen $E(\emptyset) = 0$ und $E(\Delta)$ ein komplexes Maß $\mu_{x,y}$ auf $(\Delta, \mathfrak{A})$. Es gilt

$$\Big(\big(\int f \, dE\big)x \mid y\Big) = \int f \, d\mu_{x,y} \quad \forall f \in \mathcal{A}_b, \ x, y \in H. \tag{4.4.4}$$

(c) Für eine Folge $f_n \in \mathcal{A}_b$ mit $\sup_n \|f_n\|_\infty = C < \infty$ und $f_n \to f$ punktweise auf Δ gilt

$$\Big(\big(\int f_n \, dE\big)x \mid y\Big) \to \Big(\big(\int f \, dE\big)x \mid y\Big) \quad \forall x, y \in H$$

(sogar in der Norm von H: $(\int f_n \, dE)\, x \to \int f \, dE \, x, \quad \forall x \in H$).

(d) Definiert man das Integral über eine Teilmenge B wie üblich durch $\int f \, dE = \int \chi_B f \, dE$, für $f \in \mathcal{A}_b$, so gilt:

(i) Ist B eine (E-)Nullmenge (d.h. $E(B) = 0$), so folgt

$$\int_B f \, dE = 0 \quad \forall f \in \mathcal{A}.$$

(ii) wird E von B getragen (d.h. $E(B) = \mathrm{Id}_H$), so folgt

$$\int f \, dE = \int_B f \, dE \quad \forall f \text{ mit } \chi_B f \in \mathcal{A}.$$

Bemerkung. Erweiterung: Die Gleichung in (d)(i) soll per Definition auch für unbeschränktes f gelten, was durch die Tatsache motiviert ist, daß in 4.4.4 bei Integration über eine (E-)Nullmenge die rechte Seite der Gleichung auch für unbeschränktes f existiert und gleich null ist.

Beweis. (a) haben wir schon im Abschnitt vor diesem Satz erhalten. Für $f \geq 0$ ist

$$((\int f\, dE)x \mid x) = ((\int f^{\frac{1}{2}}\, dE)x \mid (\int f^{\frac{1}{2}}\, dE)x) \geq 0 \quad \forall x \in H,$$

d.h. $\int f\, dE \geq 0$.

(b) Für $\mathfrak{A}$-Treppenfunktionen $f = \sum_1^n \alpha_i \chi_{A_i}$ gilt

$$\begin{aligned} ((\int f\, dE)x \mid y) &= (\sum_1^n \alpha_i E(A_i)\, x \mid y) = \sum_1^n \alpha_i (\, E(A_i)\, x \mid y) \\ &= \sum_1^n \alpha_i \mu_{x,y}(A_i) = \int \sum_1^n \alpha_i \chi_{A_i}\, d\mu_{x,y} = \int f d\mu_{x,y}. \end{aligned}$$

Da jedes $f \in \mathcal{A}_b$ gleichmäßig durch Treppenfunktionen approximiert werden kann, folgt

$$((\int f\, dE)x \mid y) = \int f d\mu_{x,y} \quad \forall f \in \mathcal{A}_b,$$

denn komplexe Maße sind Linearkombinationen von positiven endlichen Maßen.

(c) Sind $f_n \in \mathcal{A}_b$ mit $\sup_n \|f_n\|_\infty < \infty$ und $f_n \to f$ punktweise so folgt wegen (b) und Lebegues Satz von der dominierten Konvergenz [5, (2.30)]

$$((\int f_n\, dE)x \mid y) \to ((\int f\, dE)x \mid y)$$

wie behauptet. Um die stärkere Aussage $(\int f_n\, dE)x \to (\int f\, dE)x, \quad \forall x \in H$ zu zeigen benutzt man

$$\begin{aligned} \| \int (f_n - f)\, dE)x\|^2 &= (\int (f_n - f)\, dE)x \mid \int (f_n - f)\, dE)x) \\ &= (\int |f_n - f|^2\, dE)x \mid x), \end{aligned}$$

was nach dem soeben gezeigten (mit $|f_n - f|^2$ anstelle von f_n) gegen Null konvergiert.

(d) (i) Ist $E(B) = 0$, so gilt für alle $f \in \mathcal{A}_b$

$$\int_B f\, dE = \int \chi_B f\, dE = \int \chi_B\, dE \int f\, dE = E(B)(\int f\, dE) = 0 \quad .$$

(ii) ist $E(B) = \mathrm{Id}_H$, also $E(\Delta \setminus B) = 0$, so folgt wegen (i):

$$\int f\,dE = \int \chi_B f\,dE + \int \chi_{\Delta\setminus B} f\,dE = \int_B f\,dE + \int_{\Delta\setminus B} f\,dE = \int_B f\,dE.$$

□

4.5 Weitere Spektralsätze für Operatoren auf H

Satz 4.5.1 ((Spektralsatz II, für normale Operatoren)). *Sei $T \in B(H)$ normal, so gibt es genau ein Borelsches Spektralmaß E auf $(\sigma(T), \mathfrak{B})$ mit*

$$T = \int_{\sigma(T)} \lambda\,dE(\lambda) \quad (= \int_{\sigma(T)} \mathbf{t}\,dE,\ \text{wo } \mathbf{t}(\lambda) = \lambda \quad \forall(\lambda) \in \sigma(T)),$$

nämlich das in 4.4.2 definierte Spektralmaß von T: $E(A) = \chi_A(T) = \tilde{\Phi}_T(\chi_a)$ für Borelsches $A \subset \sigma(T)$. Für dieses Spektralmaß gilt

(a)

$$\int_{\sigma(T)} f\,dE = f(T) \quad \forall f \in \mathcal{B}_b.$$

(b) Ein Operator $S \in B(H)$ kommutiert mit T genau dann, wenn er mit allen $E(A)$, $A \in \mathcal{B}_b$ kommutiert.

Beweis. (i) Existenz: Zu T wurde in Satz 4.3.27 der Funktionalkalkül $\tilde{\Phi}_T : \mathcal{B}_b(\sigma(T)) \to B(H)$ konstruiert und dann dazu das Spektralmaß von T $E^T : \mathfrak{B} \to B(H)$. Wir zeigen $T = \int \mathbf{t}\,dE^T$. Ist $f = \sum_1^n \alpha_i \chi_{A_i}$ eine Borelsche Treppenfunktion, so gilt

$$\int f\ dE^T = \sum_1^n \alpha_i \chi_{A_i}(T) = f(T),$$

da der Borelsche Funktionalkalkül von T linear ist. Sind $f_n, n \in \mathbb{N}$, Treppenfunktionen mit $\|f_n - \mathbf{t}\|_\infty \to 0$ so folgt, wegen der $\|.\|_\infty$-Stetigkeit des Integrals und der des Borelschen Funktionalkalküls

$$\int \mathbf{t}\ dE^T = \lim_n \int f_n\ dE^T = \lim_n f_n(T) = \mathbf{t}(T) = T,$$

wobei die letzte Gleichheit Satz 4.3.27 (1) benutzt.

(ii) Eindeutigkeit: Spezialisiert man im Satz 4.4.3 $\Delta = \sigma(T), \mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ und ist $E : \mathfrak{B} \to B(H)$ ein Spektralmaß wie im Satz:

$$T = \int \mathbf{t}\,dE,$$

so erfüllt das Integral $f \mapsto \int f\, dE$ die Voraussetzungen von Satz 4.3.27, stimmt also mit dem Borelschen Funktionalkalkül $\tilde{\Phi}_T$ überein. Insbesondere gilt

$$E(A) = \int \chi_A\, dE = \chi_A(T) = E^T(A), \quad \forall A \in \mathfrak{B}.$$

d.h. E ist das zu T gehörige Spektralmaß. Im weiteren schreiben wir wieder einfach E für das zu T gehörige Spektralmaß.

(iii) Eigenschaft (a): Wie gerade in (ii) gezeigt, impliziert $\int \mathbf{t}\, dE = T$, daß das Integral bezüglich E mit dem Borelschen Funktionalkalkül von T übereinstimmt, also gilt (a).

(iv) Eigenschaft (b): Zunächst überzeugt man sich leicht, daß die Menge $\mathrm{Kom}(S) := \{R \in B(H) \,|\, RS = SR\}$ (genannt die **Kommutante** von S) eine Unteralgebra von $B(H)$ ist, die in der schwachen Operatortopologie (also auch in der Normtopologie) abgeschlossen ist. Behauptung (b) lautet

$$T, T^* \in \mathrm{Kom}(S) \Longleftrightarrow E(A) \in \mathrm{Kom}(S)\ \forall A \in \mathfrak{B}.$$

"$\Longleftarrow$": Mit den $E(A)$ liegen auch alle Linearkombinationen $\sum_1^k \alpha_i E(A_i)$, d.h. die Integrale $\int f\, dE$ aller Treppenfunktionen, in $\mathrm{Kom}(S)$. Wie schon in (a) gezeigt ist T der Limes von solchen Integralen $\int f_n\, dE$ und folglich auch $\lim \int \overline{f_n}\, dE = \lim(\int f_n\, dE)^* = T^*$, woraus $T, T^* \in \mathrm{Kom}(S)$ folgt.
"$\Longrightarrow$": Mit T und T^* liegt auch die davon erzeugte Unteralgebra von $B(H)$, also alle $f(T)$, $f \in \mathcal{C}(\sigma(T))$, in $\mathrm{Kom}(S)$. Ist $A \subset \sigma(T)$ (relativ) offen, so gibt es $f_n \in \mathcal{C}(\sigma(T))$ mit $0 \le f_n \le 1$ und $f_n \to \chi_A$ punktweise, also nach Satz 4.4.3

$$(\int f_n\, dE)x \to (\int \chi_A\, dE)x = E(A)x\ \forall x \in H.$$

Somit gilt $E(A) \in \mathrm{Kom}(S)$ für offenes $A \subset \sigma(T)$. Sind $E(A)$, $E(B) \in \mathrm{Kom}(S)$ so auch

$$\begin{aligned} E(A \cap B) &= E(A)E_B, \text{ ebenso} \\ E(A \setminus B) &= E(A) - E_B \text{ sowie} \\ E(A \cup B) &= E(A \setminus B) + E(B). \end{aligned}$$

Sind A_n, $n \in \mathbb{N}$ paarwise disjunkt mit $E(A_n) \in \mathrm{Kom}(S)\, \forall n \in \mathbb{N}$, so gilt

$$\begin{aligned} E(\cup_n A_n) &= \sum_n E(A_n) \text{ also} \\ E(\cup_n A_n) &\in \mathrm{Kom}(S). \end{aligned}$$

Die Menge der $A \in \mathcal{B}$ mit $E(A) \in \mathrm{Kom}(S)$ ist somit eine σ-Algebra Borelscher Mengen, welche die offenen Mengen enthält, also gleich $\mathcal{B}$ sein muß.

$\square$

Bemerkung. Ein Borelsches Spektralmaß E auf $\sigma(T)$ lässt sich auf genau eine Weise zu einem Borelschen Spektralmaß $\tilde{E}$ auf $\mathbb{C}$ fortsetzen, denn wegen $\tilde{E}(\mathbb{C}) = \mathrm{Id}_H = E(\sigma(T))$ muss $\tilde{E}(\mathbb{C} \setminus \sigma(T)) = 0$ gelten, also auch $\tilde{E}(B) = 0$ für Borelsches $B \subset \mathbb{C} \setminus \sigma(T)$. Man kann nun in Satz 4.5.1 $\sigma(T)$ durch $\mathbb{C}$ und das Spektralmaß auf $\sigma(T)$ durch seine Fortsetzung auf $\mathbb{C}$ ersetzen

$$\tilde{E}(B) = \tilde{\Phi}(\chi_{B\cap\sigma(T)}) = \chi_{B\cap\sigma(T)}(T)\,\forall B \in \mathfrak{B},$$

aber bleibt die Eindeutigkeit erhalten?

Lemma 4.5.2. *Sei $T \in B(H)$ normal und E ein Borelsches Spektralmaß auf $\mathbb{C}$ mit $\int_{\sigma(T)} \mathbf{t}\, dE = T$, wo $\mathbf{t}(z) = z$, $\forall z \in \mathbb{C}$. Dann wird E von einer beschränkten Menge getragen.*

Beweis. Sei $T \in B(H)$ normal und E ein Borelsches Spektralmaßauf $\mathbb{C}$ mit $T = \int_{\mathbb{C}} \mathbf{t}\, dE$, wo $\mathbf{t}(z) = z$. Sei Q die Menge der halboffenen Quadrate $I_{m,n} = [m, m+1) \times [n, n+1)$, $n, m \in \mathbb{Z}$, die $K_{\|T\|+1}(0)$ nicht treffen. Sei $z_{m,n} = (m + \frac{1}{m}, n + \frac{1}{n})$ der Mittelpunkt von $I_{m,n}$. Es gilt $|\mathbf{t} - z_{m,n}\chi_{I_{m,n}}| < \frac{1}{\sqrt{2}}$ auf $I_{m,n}$, also nach Satz 4.4.3

$$\|z_{m,n}E(I_{m,n}) - \int_{I_{m,n}} \mathbf{t}\, dE\| = \|\int_{I_{m,n}} (z_{m,n}\chi_{I_{m,n}} - \mathbf{t})\, dE\| \le \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Da

$$int_{I_{m,n}} \mathbf{t}\, dE = \int_{\mathbb{C}} \chi_{I_{m,n}} \mathbf{t}\, dE = E(I_{m,n})T,$$

erhalten wir

$$\|z_{m,n}E(I_{m,n})\| \le \frac{1}{\sqrt{2}} + \|T\|.$$

Andereseits gilt

$$\|z_{m,n}E(I_{m,n})\| = z_{m,n}\|E(I_{m,n})\| \ge (\|T\| + 1)\|E(I_{m,n})\|.$$

Es folgt $\|E(I_{m,n})\| = 0$. Als abzählbare Vereinigung von E-Nullmengen ist $J := \cup_{m,n} I_{m,n}$ eine E-Nullmenge. Somit wird E von $\mathbb{C} \setminus J$ getragen, und $\mathbb{C} \setminus J$ ist als Vereinigung endlich vieler Quadrate beschränkt. □

Satz 4.5.3 (Spektralsatz II´, für normale Operatoren). *Ist $T \in B(H)$ normal, so gibt es genau ein Borelsches Spektralmaß E auf $\mathbb{C}$ mit*

$$T = \int_{\mathbb{C}} \lambda\, dE_\lambda$$

(= $\int_{\mathbb{C}} \mathbf{t}\, dE$, wo $\mathbf{t}(\lambda) = \lambda$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$), nämlich das auf $\mathbb{C}$ fortgesetzte Spektralmaß von T ($E(B) = \chi_{B\cap\sigma(T)}(T)\,\forall B \in \mathfrak{B}$). Für dieses Spektralmaß gilt

(a)

$$\int_{\mathbb{C}} f\, dE = \int_{\sigma(T)} f\, dE = f(T),\ \forall f \in \mathcal{B}_b$$

(b) Ein Operator $S \in B(H)$ kommutiert mit T genau dann, wenn er mit allen $E(A)$, $A \in \mathfrak{B}$, kommutiert.

Im Fall von selbstadjungiertem T ($T = T^*$) gilt der Satz auch mit $\mathbb{R}$ anstelle von $\mathbb{C}$.

Beweis. Daß das fortgesetzte Spektralmaß von T alles erfüllt ist wegen Spektralsatz II klar. Eindeutigkeit: Sei E ein Borelsches Spektralmaß auf $\mathbb{C}$ mit $T = \int_{\mathbb{C}} \mathbf{t}\, dE$. Nach dem Lemma 4.5.2 wird E von einer beschränkten Menge $K \subset \mathbb{C}$ getragen. Wir können K kompakt mit $K \supset \sigma(T)$ wählen. Wegen $T = \int \mathbf{t}\, dE = \int_K \mathbf{t}\, dE$ gilt nach Satz 4.4.3 (a)(d) $\int \overline{\mathbf{t}}\, dE = T^*$, folglich $\int p(\mathbf{t}, \overline{\mathbf{t}})\, dE = p(T, T^*)$ für alle Polynome $p(t, \overline{t})$, also ist wegen Stone-Weierstraß auch $\int f\, dE$ für alle $f \in \mathcal{C}(K)$ eindeutig bestimmt. Hieraus folgt wegen Satz 4.4.3 (c), daß $\int \chi_A\, dE = E(A)$ für (relativ) offene A in K festgelegt ist, denn für jedes solche A gibt es eine beschränkte Folge in $\mathcal{C}(K)$, die punktweise gegen $\chi_A$konvergiert. Sind $E(B)$ und $E(C)$ bestimmt, so auch $E(B \cap C) = E_B \cap E(C)$ und $E(K \setminus B) = \mathrm{Id}_H - E(B)$, und sind $E(A_k)$, $k \in \mathbb{N}$, für paarweise disjunkte Borelsche Teilmengen A_k von K bestimmt, so auch $E(\cup_k A_k) = \sum_1^\infty E(A_k)$. Somit bildet die Menge der Borelschen $A \subset K$ mit eindeutig bestimmtem $E(A)$ eine σ-Algebra, welche die (relativ) offenen Teilmengen von K enthält, mithin gleich $\mathfrak{B}(K)$ ist. Also stimmt E auf K mit dem (fortgesetzten) Spektralmaß von T überein. Auf $\mathbb{C} \setminus K$ verschwinden beide, folglich sind die Spektralmaße insgesamt gleich: für $B \in \mathfrak{B}$ gilt $E(B) = E(B \cap \sigma(T)) + E(B \cap (\mathbb{C} \setminus \sigma(T))) = E(B \cap \sigma(T)) = \chi_{B \cap \sigma(T)}(T)$. □

Definition 4.5.4. *Die Fortsetzung des Spektralmaßes von T auf $\mathbb{C}$ (bzw. im Fall von $T = T^*$ auf $\mathbb{R}$) nennen wir das Spektralmaß von T auf $\mathbb{C}$ (bzw. auf $\mathbb{R}$).*

Eine andere *klassische* Form des Spektralsatzes:

Satz 4.5.5 (Spektralsatz III, für selbstadjungierte Operatoren)**.** *Sei $T = T^* \in B(H)$ selbstadjungiert, also $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$. Sei $m = \min \sigma(T)$, $M = \max \sigma(T)$. Dann gibt es eindeutig bestimmte orthogonale Projektionen $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ (Spektralschar genannt) mit:*

(i) $E_\lambda \leq E_\mu$ (*also* $E_\lambda H \subset E_\mu H$) $\forall \lambda < \mu$.

(ii) $E_\lambda = 0$ *für* $\lambda \leq m$, *sowie* $E_\lambda = \mathrm{Id}_H$ *für* $\lambda > M$

(iii) $\lim_{\lambda \uparrow \mu} E_\lambda x = E_\mu x \ \forall x \in H$

(iv) $T = \int_m^{M+\varepsilon} \lambda\, dE_\lambda$ *(normkonvergentes Riemann-Stieltjes Integral), wobei* $\varepsilon > 0$ *beliebig ist.*

Außerdem gilt

(v) für $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ $f_{|\sigma(T)}(T) = \int_m^{M+\varepsilon} f(\lambda)\, dE_\lambda$,

(vi) für $S \in B(H)$ *gilt* $ST = TS \Leftrightarrow (SE_\lambda = E_\lambda S \ \forall \lambda \in \mathbb{R})$

Beweis. Existenz: Ist E das (fortgesetzte) Spektralmaß von T auf $\mathbb{R}$, so nimmt man $E_\lambda := E((-\infty, \lambda))$ und stellt fest, daß (i)-(iii) erfüllt ist. Für $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}} f\, dE = \int_{[m,M+\varepsilon)} f\, dE = \int_{\sigma(T)} f\, dE = f_{|\sigma(T)}(T),$$

da E von $\sigma(T)$ getragen wird. Das zweite Integral kann durch gleichmäßige Approximation von f auf $[m, M+\varepsilon)$ mit Treppenfunktionen der Form

$$\sum_1^n \alpha_i \chi_{[\alpha_{i-1},\alpha_i)}, \text{ wo } m = \alpha_0 < \ldots, \alpha : n = M + \varepsilon,$$

gewonnen werden. Da $E([a,b)) = E_b - E_a$ gilt und man $\alpha_i = f(x_i)$ mit $x_i \in [\alpha_{i-1}, \alpha_i)$wählen kann, lässt sich

$$\int_{[m,M+\varepsilon)} f\, dE$$

auch als Riemann-Stieltjes-Integral interpretieren,was zusammen mit Satz 4.5.3 (iv) und (v) zeigt. Zu (vi): $\Rightarrow$ folgt aus 4.5.3, $\Leftarrow$ aus der Tatsache, daß T Limes von Operatoren der Form

$$\sum_1^n \alpha_i E([a_{i-1}, a_i)) = \sum_1^n \alpha_i (E_{a_i} - E_{a_{i-1}})$$

ist.

Eindeutigkeit: Sei $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}\}$ eine Schar von orthogonalen Projektionen in $B(H)$, die (i)–(iv) erfüllen, sei $J := [m, M+\varepsilon)$ und $\mathfrak{H}$ die Menge der halboffenen Intervalle $[a, b) \subset J$. Sei $\mathcal{T}$ der Raum der $\mathfrak{H}$-Treppenfunktionen (d.h. von der Form $\sum_1^n \alpha_i \chi_{A_i}$ mit $A_i \in \mathfrak{H}$, und sei

$$L = \{f : J \to \mathbb{C} \mid \exists f_n \in \mathcal{T} \text{ mit } \|f - f_n\|_\infty \to 0\}.$$

Setzt man $F([a, b)) = E_b - E_a$, so ist F ein projektorwertiger Inhalt auf $\mathfrak{H}$, d.h. für paarweise disjunkte $A_i \in \mathfrak{H}$ mit $\cup_1^n A_i \in \mathfrak{H}$ gilt $F(\cup_1^n A_i) = \sum_1^n F(A_i)$.

Analog wie in Abschnitt 4.4 lässt sich auf $\mathcal{T}$ durch

$$I(\sum_1^n \alpha_i \chi_{A_i}) = \sum_1^n \alpha_i F(A_i)$$

ein elementares Integral definieren und per Stetigkeit auf L fortsetzen;

$$\int_J f\, dF = \lim I(f_n), \text{ wo } f_n \in \mathcal{T} \text{ mit } \|f - f_n\|_\infty \to 0.$$

Das Integral $f \mapsto \int f\, dF$ ist dann ein unitaler $*$-Homomorphismus von L nach $B(H)$, positiv (d.h. $f \geq 0 \Rightarrow \int f\, dF \geq 0$, für die Ordnung auf $B(H)$ siehe Übung 4.6.2) und mit $\| \int f\, dF\| \leq \|f\|_\infty$.

Für $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ ist $f_{|J}$ gleichmässig stetig (sogar auf $\overline{J}$), also existiert das Riemann-Stieltjes-Integral

$$\int_J f(\lambda)\, dE_\lambda.$$

Die approximierenden Summen

$$\sum f(x_i)(E_{a_i} - E_{a_{i-1}}) \text{ lassen sich als } I(\sum f(x_i)\chi_{[a_{i-1},a_i)})$$

lesen und da mit fortschreitender Approximation die Längen der Intervalle $[a_{i-1}, a_i)$ gegen null gehen, wird f gleichmäßig approximiert, es gilt also

$$\int_J f(\lambda)\, dE_\lambda = \int_J f\, dF.$$

Für $f(\lambda) = \lambda$ ist $\int f\, dF$ durch (iv) eindeutig festgelegt.

Das legt auch $\int_J p\, dF$ für jedes Polynom p fest, und da die Polynome in $\mathcal{C}(\overline{J})$ und somit auch in $\mathcal{C}_{|J}$dicht liegen, ist $\int_J f\, dF$ für jedes $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ eindeutig bestimmt.

Sei nun $m < \lambda < M + \varepsilon$ und sei $n \in \mathbb{N}$ mit $m < \lambda - \frac{1}{n} < \lambda$. Sei $f_n \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ stückweise linear, $f_n = 1$ auf $(-\infty, \lambda - \frac{1}{n}]$, $f_n = 0$ auf $[\lambda, \infty)$ linear auf $[\lambda - \frac{1}{n}, \lambda)$. Es gilt

$$\chi_{(-\infty,\lambda-\frac{1}{n}]} \leq f_n \leq \chi_{(-\infty,\lambda)}, \text{ also auf } J : \chi_{([m,\lambda-\frac{1}{n}]} \leq f_{n|J} \leq \chi_{(m,\lambda)},$$

und somit

$$E_{\lambda-\frac{1}{n}} - 0 = \int_m^{\lambda-\frac{1}{n}} dF \leq \int_J f_n\, dF \leq \int_m^{\lambda} dF = E_\lambda - 0.$$

Wegen

$$(E_{\lambda-\frac{1}{n}} x|x) \to (E_\lambda x|x)\ \forall x \in H \text{ gilt } (\int_J f_n\, dF\, x|x) \to (E_\lambda x|x)\ \forall x \in H,$$

d.h. die orthogonale Projektion E_λ ist eindeutig bestimmt. $\square$

Der Satz 4.5.5 entsprechende Spektralsatz III für normale Operatoren ist etwas umständlicher zu formulieren, da $\sigma(T)$ nun komplex ist. Die Spektralschar hat nun einen komplexen Parameter. Auf $\mathbb{C}$ benutzen wir die Ordnung $\preceq$, wobei für $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 i$, $\mu = \mu_1 + \mu_2 i$ $\lambda \preceq \mu$ gleichbedeutend mit $\lambda_1 \leq \mu_1$ und $\lambda_2 \leq \mu_2$ ist, m und M sind nun inf und sup von $\sigma(T)$ im Sinne dieser Ordnung. Bei (vi) steht dann rechts $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, bei (iv) steht ein zweidimensionales Riemann-Stieltjes-Integral. Der Beweis ergibt sich analog mit $E_\lambda = E_{(-\infty,a)\times(-\infty,b)}$ für $\lambda = (a, b) \in \mathbb{C}$. Um die Projektorwerte der für das Sieltjes-Integral benötigten halboffenen Rechtecke darzustellen braucht man nun vier Terme: $E([a, b) \times [c, d)) = E((b, d)) - E((a, d)) - E((b, a)) + E((a, c))$.

4.6 Übungen, Beispiele, Ergänzungen

Übung 4.6.1. *Sei $a \in A$ ein normales Element einer C^*-Algebra A. Man zeige*

$$\lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} = \|a\|.$$

Übung 4.6.2. *Sei H ein komplexer Hilbertraum.*
$B(H)_+ = \{A \in B(H) \mid \ < Ax \mid x > \geq 0 \ \forall x \in H\}$ die Menge der positiven Operatoren auf H. Man zeige:

(i) $B(H)_+$ ist ein konvexer Kegel.

(ii) Die Relation $A \leq B \ :\Leftrightarrow B - A \in B(H)_+$ definiert eine Ordnung auf $B(H)$.

Übung 4.6.3. *Sei $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra von Teilmengen von Δ. Eine (komplexwertige) Funktion heißt Treppenfunktion, falls sie nur endlich viele Werte annimmt. Man zeige, daß sie eine Darstellung*

$$\sum_1^n \alpha_i \chi_{A_i}, \quad \alpha_i \in \mathbb{C},\ A_i \in \mathfrak{A}$$

mit paarweise disjunkten Mengen $\{A_1, \ldots, A_n\}$ besitzt.

Übung 4.6.4. *Zu jedem (komplexwertigem) beschränkten $\mathfrak{A}$-meßbaren $f \in \mathcal{A}_b$ gibt es eine Folge von Treppenfunktionen, die gleichmäßig gegen f konvergiert. Hinweis: Man zerlege den Wertebereich der zu approximierenden Funktion jeweils fein genug.*

Übung 4.6.5. *Sei $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra von Teilmengen von Δ. Man zeige, daß die beschränkten $\mathfrak{A}$-meßbaren komplexwertigen Funktionen $\mathcal{A}_b$ mit punktweisen Operationen und der Norm, $\|f\|_\infty = \sup_{y\in\Delta} |f(y)|$ eine Banachalgebra bilden. Durch komplexe Kongugation ist eine isometrische Involution gegeben.*

Übung 4.6.6. *Sei $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra von Teilmengen von Δ Man zeige, daß für eine meßbare komplexwertige Funktion ihr Spektrum in der Banachalgebra $\mathcal{A}_b$ der beschränkten $\mathfrak{A}$-meßbaren Funktionen der topologische Abschluß ihres Bildes ist. D.h.*

$$\sigma_{\mathcal{A}}(f) = \overline{f(\Delta)}$$

Übung 4.6.7. *Man zeige die Behauptung nach 4.4.1, nämlich, daß in der Definition (b) ein Folge von (a) und (c) ist.*