Kapitel 3

Hilberträume

3.1 Grundbegriffe

Sei E ein Vektorraum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

Definition 3.1.1. *Ein* **Skalarprodukt** *auf E ist eine Abbildung*

$$\begin{aligned} (\ \ |\ \ ) : E \times E &\to \mathbb{K} \\ (x,y) &\mapsto (x|y) \end{aligned}$$

mit

(i) $(f|f) > 0$ *für* $f \neq 0$
(ii) $(\alpha f + \beta g|h) = \alpha(f|h) + \beta(g|h)$
(iii) $(f|g) = \overline{(g|f)}$

für alle $f, g, h \in H$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

Bemerkung 3.1.2. (a) Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist $(\ \ |\ \ )$ eine positive definite symmetrische Bilinearform, im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ eine positive definite hermitesche Sesquilinearform, denn aus (ii) und (iii) folgt

$$(h|\alpha f + \beta g) = \overline{\alpha}(h|f) + \overline{\beta}(h|g),$$

also Antilinearität (oder konjugiert - Linearität) im zweiten Argument.

(b) Aus (i) - (iii) folgt die **Cauchy-Schwarzsche Ungleichung**

$$|(f|g)|^2 \leq (f|f)(g|g) \qquad\qquad (CS).$$

wobei Gleichheit genau dann gilt, wenn f und g linear abhängig sind.

Beweis. Falls $g = 0$, ist die Behauptung erfüllt. Falls $g \neq 0$, gilt $0 \leq \big(f - \frac{(f|g)}{(g|g)}g | f - \frac{(f|g)}{(g|g)}g\big) = (f|f) - \frac{|(f|g)|^2}{(g|g)} - \frac{|(f|g)|^2}{(g|g)} + \frac{|(f|g)|^2}{(g|g)}$, also $|(f|g)|^2 \leq (f|f)(g|g)$. Gleichheit impliziert $f - \frac{(f|g)}{(g|g)}g = 0$, also lineare Abhängigkeit. Sind umgekehrt f und g linear abhängig, z.B. $f = \lambda g$, so folgt $|(f|g)| = |\lambda| \|g\|^2 = \|f\| \, \|g\|$. $\square$

(c) Durch $\|f\| := (f|f)^{1/2}$ wird auf E eine Norm definiert. Die Dreiecksungleichung beweist man mit (CS):

$$\begin{aligned}\|f+g\|^2 &= (f+g|f+g) \leq \|f\|^2 + 2|(f|g)| + \|g\|^2 \leq \|f\|^2 + 2\|f\|\,\|g\| + \|g\|^2 \\ &= (\|f\| + \|g\|)^2, \text{ also } \|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|.\end{aligned}$$

(d) (Polarisationsformel) Jedes Skalarprodukt kann auch durch seine zugehörige Norm ausgedrückt werden. Im reellen bzw. komplexen Fall gilt

$$(f|g) = \frac{1}{4}(\|f+g\|^2 - \|f-g\|^2) \tag{3.1.3}$$

bzw.

$$(f|g) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k \|f + i^k g\|^2 \tag{3.1.4}$$

oder ausführlich geschrieben

$$(f|g) = \frac{1}{4}(\|f+g\|^2 - \|f-g\|^2 + i\|f+ig\|^2 - i\|f-ig\|^2),$$

wie man leicht nachrechnet.

(e) Für die durch ein Skalarprodukt definierte Norm gilt die **Parallelogrammgleichung**

$$(P) \qquad \|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 \;=\; 2\|f\|^2 + 2\|g\|^2,$$

wie man leicht nachrechnet.

(f) Versieht man E mit der unter (d) definierten Norm, so ist wegen (CS) das Skalarprodukt eine stetige Funktion von $E \times E$ nach $\mathbb{K}$.

Definition 3.1.5. *Ein Vektorraum mit Skalarprodukt heißt* **Prähilbertraum.** *Ist er unter der vom Skalarprodukt herrührenden Norm vollständig, heißt er* **Hilbertraum**.

Beispiele 3.1.6. *(a) ℓ^2 ist mit $(\{x_n\}|\{y_n\}) := \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$ ein Hilbertraum.*

(b) $L^2([a,b])$ ist mit $(f|g) := \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$ ein Hilbertraum.

Satz 3.1.7 (Jordan-von Neumann)**.** *Sei $(E, \|\ \|)$ ein normierter Raum. Es gibt genau dann ein Skalarprodukt $(\ |\ )$ auf E mit $\|x\| = (x|x)^{1/2}$ für $x \in E$, wenn die Norm $\|\ \|$ die Parallelogrammgleichung erfüllt.*

Beweis. Wegen Bemerkung (e) oben ist nur noch die Implikation $\Leftarrow$ zu zeigen. Gelte also

$$(P) \qquad \|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2\|f\|^2 + 2\|g\|^2$$

für alle $f, g \in E$ und sei $(f|g)$ durch die Polarisationsformel 3.1.3 bzw. 3.1.4 definiert, woraus sich direkt Folgendes ergibt:

(a) $\|x\|^2 = (x|x)$ (im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ wegen $|1+i| = |1-i|$), $(x|y) = (y|x)$ bzw. $(x|y) = \overline{(y|x)}$ im reellen bzw. komplexen Fall, $(0|y) = 0$, $(-x|y) = -(x|y)$, $(ix|y) = i(x|y)$ (falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

(b) Wir betrachten zunächst den reellen Fall und zeigen Additivität im ersten Argument von $(\ |\ )$. Nach Definition von $(\ |\ )$ (s. oben) gilt

$$\begin{aligned}
4((x|z) + (y|z)) &= \|x+z\|^2 - \|x-z\|^2 + \|y+z\|^2 - \|y-z\|^2 \\
&= \|x+z\|^2 + \|y\|^2 - \|x-z\|^2 - \|y\|^2 + \|y+z\|^2 + \|x\|^2 - \|y-z\|^2 - \|x\|^2 \\
&\overset{(P)}{=} \frac{1}{2}(\|x+y+z\|^2 + \|x-y+z\|^2 - \|x+y-z\|^2 - \|x-y-z\|^2 \\
&\quad + \|x+y+z\|^2 + \|-x+y+z\|^2 - \|x+y-z\|^2 - \|-x+y-z\|^2) \\
&= \|x+y+z\|^2 - \|x+y-z\|^2 = 4(x+y|z).
\end{aligned} \tag{3.1.8}$$

(c) Aus der Additivität folgt sogleich $(2x|z) = 2(x|z)$ und per Induktion $(nx|z) = n(x|z)$ für $n \in \mathbb{N}$, wegen $(x|z) = (m \cdot \frac{1}{m}x|z) = m(\frac{1}{m}x|z)$ auch $(\frac{1}{m}x|z) = \frac{1}{m}(x|z)$, somit auch $(\lambda x|z) = \lambda(x|z)$ für positive $\lambda \in \mathbb{Q}$, und wegen (a) für alle $\lambda \in \mathbb{Q}$. Da auf $\mathbb{R}$ die Abbildungen $\lambda \mapsto \lambda(x|z)$ und $\lambda \mapsto (\lambda x|z)$ beide stetig sind und auf $\mathbb{Q}$ übereinstimmen, stimmen sie ganz überein: $\lambda(x|z) = (\lambda x|z)$ für $\lambda \in \mathbb{R}$. Gemäß(a) gilt auch $(x|x) = \|x\|^2 > 0$ für $x \neq 0$ und $(x|y) = (y|x)$ für $x, y \in E$, d.h. $(\,|\,)$ ist ein Skalarprodukt auf E mit $(x|x)^{1/2} = \|x\|$.

(d) Der Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Das durch die Polarisationsformel 3.1.4 definierte $(x|y)$ trennt man in Real- und Imaginärteil. Die Abschnitte (b) und (c) gelten auch für den Realteil, d.h. dieser ist im ersten Argument additiv und homogen für reelle Skalare. Der entsprechende Beweis für den Imaginärteil ist identisch, nur steht in den quadratischen Normausdrücken iz statt z. Somit ist insgesamt $(x|y)$ im ersten Argument additiv und homogen für reelle Skalare. Dies zusammen mit (a) zeigt, daß $(\,|\,)$ ein Skalarprodukt mit $(x|x)^{1/2} = \|x\|$ ist. □

Korollar 3.1.9. *Ein normierter Raum ist genau dann ein Praehilbertraum, wenn jeder 2-dimensionale Unterraum ein Praehilbertraum ist.*

3.2 Konvexität und Orthogonalität

Definition 3.2.1. *Ist E ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, so heißt eine Teilmenge $K \subset E$* **konvex**, *wenn gilt: $x, y \in K$, $0 < \alpha < 1 \Rightarrow \alpha x + (1-\alpha)y \in K$.*

Satz 3.2.2. *Sei G ein Prä-Hilbertraum, $K \subset G$ eine nichtleere vollständige konvexe Teilmenge. Dann gibt es zu jedem $x \in G$ genau ein $y \in K$ mit*

$$\|x-y\| = \inf_{z \in K} \|x-z\|.$$

Man bezeichnet dieses eindeutig bestimmte y als Projektion von x auf K und schreibt $y = P_K x$.

Beweis. Sei $\{y_n\}$ eine Folge in K mit $\|x - y_n\| \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \inf_{z\in K} \|x - z\| = c$. Wir zeigen, daß $\{y_n\}$ eine Cauchyfolge ist, unter Benutzung der Parallelogrammgleichung und der Tatsache, daß $\frac{1}{2}(y_n + y_m)$ wegen der Konvexität von K wieder in K liegt. Mit $z_n = x - y_n$ erhalten wir aus der Parallelogrammgleichung $\|z_n - z_m\|^2 + \|z_n + z_m\|^2 = 2\|z_n\|^2 + 2\|z_m\|^2$ die Gleichung $\|y_m - y_n\|^2 = 2\|x - y_n\|^2 + 2\|x - y_m\|^2 - \|2(x - \frac{1}{2}(y_n + y_m))\|^2$. Da der letzte Term dieser Gleichung $\leq -4c^2$ ist und $\|x-y_n\| \to c$ gilt, folgt $\|y_m - y_n\|^2 \to 0$ für $m, n \to \infty$, d.h. $\{y_n\}$ ist eine Cauchy-Folge. Da K vollständig ist, konvergiert $\{y_n\}$ gegen ein $y \in K$. Es gilt (wegen der Stetigkeit der Norm) $\|x - y\| = \lim \|x - y_n\| = \inf_{z\in K} \|x - z\|$. Ist $y' \in K$ mit derselben Eigenschaft gegeben, so folgt aus obigem, daß $(y, y', y, y', ...)$ eine Cauchyfolge ist, also $y = y'$. □

Definition 3.2.3. *Sei G ein Prähilbertraum. Man nennt Elemente x und y aus G* **orthogonal** *$(x \perp y)$, wenn $(x|y) = 0$ gilt. Teilmengen $A, B, \subset G$ heißen orthogonal $(A \perp B)$, wenn $(a|b) = 0$ gilt für alle $a \in A$, $b \in B$. Ist $A \subset G$, so heißt $A^\perp = \{x \in G \mid x \perp A\}$ das* **orthogonale Komplement** *von A.*

Bemerkung 3.2.4. (a) Sind $x_1, ..., x_n \in G$ paarweise orthogonal*, so gilt* $\|x_1 + ... + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + ... + \|x_n\|^2$ *(***"Satz des Pythagoras"***).*

(b) $A^\perp$ ist stets ein abgeschlossener Teilraum von G.

Satz 3.2.5 (Orthogonale Zerlegung). *Ist M ein vollständiger Teilraum des Prähilbertraumes G, so gilt $G = M \oplus M^\perp$.*

Beweis. Sei $x \in G$, $y = P_M x$ (siehe Satz 3.2.2). Aus $\|x - y\| \leq \|x - m\|$ für alle $m \in M$ leitet man $(x - y) \perp M$ her: Wäre $m \in M$ mit $\|m\| = 1$ und $(x - y|m) = \alpha \neq 0$, so wäre $x - y - \alpha m$ orthogonal zu m, also nach Pythagoras $\|x - y - \alpha m\|^2 + \|\alpha m\|^2 = \|x - y\|^2$, d.h. für $m' = y + \alpha m \in M$ gälte $\|x - m'\| < \|x - y\|$, was nicht sein kann. Somit ist $x - y$ orthogonal zu M. Also gilt $x = y + (x - y) \in M + M^\perp$ und somit $G = M + M^\perp$. Ist $x \in M \cap M^\perp$ so gilt $(x|x) = 0$, also $x = 0$, folglich ist die Summe direkt: $G = M \oplus M^\perp$. □

Bemerkung und Definition 3.2.6. Für $m^\perp \in M^\perp$ liefert die soeben bewiesene Zerlegung $m^\perp = P_M m^\perp + (m^\perp - P_M m^\perp)$. Da ebenso $m^\perp = 0 + m^\perp$ gilt, folgt aus der Eindeutigkeit der Zerlegung $P_M m^\perp = 0$, also $P_M = 0$ auf $M^\perp$. Auf M gilt $P_M = id_M$. Offenbar gilt $P_M \in B(G)$ und $\|P_M\| = 1$. Man nennt P_M die **orthogonale Projektion auf M**.

3.3 Orthonormalbasen

Orthonormalsysteme

Definition 3.3.1. *Ist G ein Prähilbertraum, so heißt $A \subset G$ ein* **orthonomales System** *(ONS), wenn $(a|b) = \delta_{ab}$ gilt für alle $a, b \in A$.*

Bemerkung 3.3.2. (a) Ist $A \subset G$ ein endliches ONS, so folgt aus $0 \leq \|x - \sum_{a\in A}(x|a)a\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{a\in A} |(x|a)|^2 - \sum_{a\in A} |(x|a)|^2 + \sum_{a\in A} |(x|a)|^2 = \|x\|^2 -$

$\sum_{a\in A}|(x|a)|^2$ die **Besselsche Ungleichung:**

$$\sum_{a\in A}|(x|a)|^2 \;\le\; \|x\|^2 \;\text{ für alle } x\in G.$$

Hieraus folgt, daß bei beliebigem ONS A für jedes x höchstens abzählbar viele $a\in A$ mit $(x|a)\neq 0$ existieren. Die Besselsche Ungleichung gilt auch für unendliche ONS A, wenn wir die Summe links als Supremum über die endlichen Teilsummen definieren oder, was dasselbe ist, als $\sum_{n=1}^{\infty}|(x|a_n)|^2$ wobei a_n die $a\in A$ mit $(x|a)\neq 0$ in irgendeiner Reihenfolge durchläuft.

(b) Für jedes endliche ONS A gilt

$$\Big(x-\sum_{a\in A}(x|a)a\Big)\perp A \qquad \text{für alle } x\in G.$$

Beweis. Für jedes $b\in A$ gilt

$$(x-\sum_{a\in A}(x|a)a|b)=(x|b)-(x|b)(b|b)=0$$

$\square$

(c) Ist $A=\{a_1,...,a_n\}$ ein endliches ONS und sind $\lambda_1,...,\lambda_n\in\mathbb{K}$, so gilt für jedes $x\in G$

$$\|x-\sum_1^n\lambda_i a_i\|\ge\|x-\sum_1^n(x|a_i)a_i\|,$$

d.h. $\sum_1^n(x|a_i)a_i$ liefert die beste Approximation von x innerhalb von Lin.

Beweis. $x-\sum\lambda_i a_i=[x-\sum(x|a_i)a_i]-[\sum(\lambda_i-(x|a_i))a_i]$ und nach (b) oben sind die beiden Terme in eckigen Klammern zueinander orthogonal. Mit "Pythagoras" (s.o.) erhalten wir $\|x-\sum\lambda_i a_i\|^2=\|x-\sum(x|a_i)a_i\|^2+\|\sum(\lambda_i-(x|a_i)a_i\|^2\ge \|x-\sum(x|a_i)a_i\|^2$. $\square$

(d) Ist A ein ONS in G und $\{\lambda_a\}\in\ell^2(A)$, d.h. gilt $\lambda_a\in\mathbb{K}$ für jedes $a\in A$, $\lambda_a\neq 0$ für höchstens abzählbar viele $a_n (n\in\mathbb{N})$ und $\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_{a_n}|^2<\infty$, so ist $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_{a_n}a_n$ eine Cauchy-Reihe. Konvergiert diese Reihe, so konvergiert auch jede Umordnung davon und hat denselben Grenzwert (folgt leicht aus der Orthogonalität der Reihenglieder). Man bezeichnet dann den Grenzwert mit $\sum_{a\in A}\lambda_a a$. Ist x dieser Grenzwert, so gilt $\lambda_a=(x|a)$ für jedes $a\in A$.

Orthonormalbasen

Satz 3.3.3. *Sei G ein Prähilbertraum, A ein ONS in G. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) A ist total in G, d.h. das lineare Erzeugnis von A ist dicht in G.

(ii) $x=\sum_{a\in A}(x|a)a$ für alle $x\in G$.

(iii) $(x|y)=\sum_{a\in A}(x|a)\overline{(y|a)}$ für alle $x,y,\in G$

(iv) $\|x\|^2 = \sum_{a\in A} |(x|a)|^2$ *für alle* $x \in G$ **(Parsevalsche Gleichung)**.
Ist G vollständig, so sind auch folgende (schwächere) Aussagen zu den vorigen äquivalent:
(v) $x \perp A \Rightarrow x \Rightarrow 0$.
(vi) A ist ein maximales ONS in G

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): Gelte (i) und sei $x \in G$. Es gibt $x_n \in \mathrm{Lin}A$ mit $x_n \to x$. Ist $x_n = \sum_{k=1}^{k_n} \lambda_k^{(n)} a_k^{(n)}$ mit $\lambda_k^{(n)} \in \mathbb{K}$ und $a_k^{(n)} \in A$, so können wir $\{a_k^{(n)} | 1 \le k \le k_n\} \subset \{a_k^{(n+1)} | 1 \le k \le k_{n+1}\}$ für alle n annehmen, denn eine Linearkombination ändert sich nicht, wenn man weitere Vektoren mit dem Faktor Null hinzuaddiert. Also lassen sich die x_n in der Form $x_n = \sum_{k=1}^{k_n} \lambda_k^{(n)} a_k$ mit von n unabhängigen $a_k \in A$ darstellen. Nach Bemerkung 3.3.2 (c) gilt $\|x - \sum_1^{k_n} (x|a_k)a_k\|^2 \le \|x - x_n\|^2 \to 0$, woraus $x = \sum_1^\infty (x|a_k)a_k$ folgt.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): folgt aus der Tatsache, daß A ein ONS und das Skalarprodukt stetig ist.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): ist klar.

(iv) $\Rightarrow$ (i): folgt aus Bemerkung 3.3.2 (a): für endliches $B \subset A$ gilt

$$\|x - \sum_{a\in B} (x|a)a\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{a\in B} |(x|a)|^2.$$

Durchläuft $\{a_n\}$ diejenigen $a \in A$ mit $(x|a) \neq 0$ und setzen wir $B = \{a_1, ..., a_n\}$, so geht die rechte Seite obiger Gleichung nach Voraussetzung mit $n \to \infty$ gegen 0, also auch die linke. Somit ist $\mathrm{Lin}A$ dicht in G.

(v) $\Leftrightarrow$ (vi): ist klar (da die Negationen beider Bedingungen äquivalent sind).

(i) $\Rightarrow$ (v): $x \perp A \Rightarrow x \perp x$ (wegen (i) und Stetigkeit des Skalarprodukts) $\Rightarrow x = 0$.

Sei G nun vollständig.

$(v) \Rightarrow$ (i) (Beweis durch Kontraposition): Sei A nicht total, also $M = \overline{\mathrm{Lin}A} \neq G$. Nach dem Satz 3.2.5 gilt $G = M \oplus M^\perp$. Es gibt also ein $x \neq 0 \in M^\perp$. Wegen $A \subset M$ folgt $x \perp A$, was die Negation von (v) ist. □

Definition 3.3.4. *Ein ONS in einem Hilbertraum heißt* **Orthonormalbasis***(ONB), wenn es eine der äquivalenten Bedingungen (i) - (vi) des vorigen Satzes erfüllt.*

Bemerkung. Ist H ein Hilbertraum, A eine (ONB) in H, so folgt aus (iv) von Satz 3.3.2, daß die Abbildung $x \mapsto \{(x|a)\}_{a\in A}$ linear und isometrisch von H nach $\ell^2(A)$ ist, wenn man in $\ell^2(A)$ die Norm analog wie in $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{N})$ definiert. Aus Bemerkung 3.3.2 (d) folgt, daß diese Abbildung surjektiv ist. Also gilt $H \cong \ell^2(A)$ (isometrische Isomorphie).

Satz 3.3.5. *Ist G ein Prähilbertraum und sind A, B maximale ONS, so haben A und B gleiche Mächtigkeit.*

Beweis. Ist A endlich, so gilt $\#B \le \#A$ (man benutzt, daß orthogonale Vektoren linear unabhängig sind). Ist A unendlich, so betrachte man für $x \in A$

die Menge $B(x) = \{y \in B \mid (y|x) \neq 0\}$. Wegen der Besselschen Ungleichung ist $B(x)$ höchstens abzählbar. Es gilt $B = \bigcup B(x)$, also $\#B \leq \aleph_0 \cdot \#A = \#A$ (da $\#A$ eine unendliche Kardinalzahl ist). Wir haben somit $\#B \leq \#A$ gezeigt. Vertauschung von A und B führt zu $\#A \leq \#B$, also $\#A = \#B$. □

Definition 3.3.6. *Die* **Hilbertdimension** *eines Prähilbertraums G ist die Kardinalzahl eines maximalen ONS in G.*

Vorsicht: Im unendlich-dimensionalen Fall kann diese Dimension kleiner sein als die Vektorraumdimension (Kardinalität einer Hamel-Basis), muss es aber nicht. Vgl. 3.5.28.

Bemerkung.

(a) Ist $B \subset G$ ein ONS, so gibt es nach dem Lemma von Zorn ein maximales ONS A mit $A \supset B$. Insbesondere lässt sich jedes ONS im Hilbertraum zu einer ONB ergänzen.

(b) Ist G ein separabler Prähilbertraum, so kann man sich ohne Benutzung des Zornschen Lemmas ein maximales ONS verschaffen, denn es gilt: Ist $\{a_n\}$ eine Folge linear unabhängiger Vektoren in G, so gibt es eine orthonormale Folge $\{b_n\}$ mit $\mathrm{Lin}\{a_1, ..., a_n\} = \mathrm{Lin}\{b_1, ..., b_n\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, wobei "Lin" das lineare Erzeugnis bedeutet. (Gram-Schmidtsches Orthonormalisierungsverfahren: Sei $b_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|}$. Sind $b_1, \ldots, b_n$ schon konstruiert, so sei $b'_{n+1} = a_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} (a_{n+1}|b_i) b_i$ und $b_{n+1} = \frac{b'_{n+1}}{\|b'_{n+1}\|}$).

Beispiel 3.3.7. *In $L^2([0,1])$ ist $A = \{e^{2\pi i n t} | n \in \mathbb{Z}\}$ eine ONB.*

Beweis. Man verifiziert unmittelbar, daß A ein ONS ist. Daß A total in $L^2([0,1])$ ist, zeigt man mit dem Weierstraßschen Approximationssatz. □

Proposition 3.3.8 (Orthogonale Zerlegung)**.** *Ist M ein abgeschlossener Unterraum eines Hilbertraumes H, so gilt $H = M \oplus M^\perp$.*

Dies ist eine schwächere Fassung von 3.2.5.

Ein anderer Beweis: Sei B eine ONB von M, A eine ONB von H, die B enthält. Für $x \in H$ gilt:

$$x = \sum_{a \in A} (x|a) a = \sum_{b \in B} (x|b) b + \sum_{a \in A \setminus B} (x|a) a \in M + M^\perp.$$

Korollar 3.3.9. *Ist M ein abgeschlossener Unterraum eines Hilbertraumes H, so gilt $M = (M^\perp)^\perp =: M^{\perp\perp}$.*

3.4 Operatoren auf Hilberträumen

Darstellungssatz von Riesz

Satz 3.4.1 (Riesz I)**.** *Ist H ein Hilbertraum und $f \in H'$, so gibt es genau ein $x \in H$ mit $f(y) = (y|x)$ für alle $y \in H$. Die Zuordnung $f \leftrightarrow x$ definiert einen isometrischen Anti-Isomorphismus (antilinear und bijektiv) zwischen H' und H.*

Beweis. Jedes $z \in H$ definiert ein Funktional $\varphi_z \in H'$ durch $\varphi_z(x) = (x|z)$. Wegen $|(x|z)| \leq \|x\|\|z\|$ gilt $\|\varphi_z\| \leq \|z\|$, wegen $|(z|z)| = \|z\|^2$ gilt $\|\varphi_z\| = \|z\|$. Somit ist die Abbildung $\Phi : z \mapsto \varphi_z$ von H nach H' isometrisch, außerdem wegen $\alpha\varphi_z = \varphi_{\overline{\alpha}z}$ antilinear. Ein $f \in H'$ ist durch seinen Kern (der Kodimension 1 hat) und den Wert an einem beliebigen Punkt außerhalb $ker f$ eindeutig bestimmt. Ist $x \in (ker f)^\perp$ mit $\|x\| = 1$ und $f(x) = \alpha$, so folgt wegen $\alpha = \alpha(x|x) = (x|\overline{\alpha}x)$, daß $f = \varphi_{\overline{\alpha}x}$, denn beide Funktionale haben gleichen Kern und gleichen Wert bei x. Somit ist Φ surjektiv, also ein isometrischer Antiisomorphismus von H auf H'. □

Adjungierte Operatoren

Definition 3.4.2. *Ist H ein Hilbertraum und $T \in B(H)$, so heißt ein Operator $T^* \in B(H)$ zu T* **adjungiert**, *wenn für alle $x, y \in H$ gilt:*

$$(Tx|y) = (x|T^*y).$$

Ist T zu sich selbst adjungiert, so heißt T **selbstadjungiert** *oder auch* **hermitesch**.

Satz 3.4.3 (Riesz II). *Sei H ein Hilbertraum über $\mathbb{K}$ und $\langle\ ,\ \rangle : H \times H \to \mathbb{K}$ linear im ersten, antilinear im zweiten Argument und außerdem stetig: $|\langle x, y\rangle| \leq C\|x\|\ \|y\|$ für alle $x, y \in H$. Dann gibt es genau ein $A \in B(H)$ mit $\|A\| \leq C$ und $\langle x, y\rangle = (x|Ay)$. Gilt $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$, so ist A hermitesch: $A = A^*$.*

Beweis. Für festes y ist $x \mapsto \langle x, y\rangle$ aus H'. Es gibt nach dem vorigen Satz also genau ein $y' =: Ay$ mit $\langle x, y\rangle = (x|Ay)$. Die Abbildung $A : y \mapsto Ay$ ist linear und $\|Ay\| = \sup_{\|x\|\leq 1} |(x|Ay)| = \sup_{\|x\|\leq 1} |\langle x, y\rangle| \leq C\|y\|$, also $\|A\| \leq C$. Aus $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$ folgt $(x|Ay) = \overline{(y|Ax)} = (Ax|y)$, also $A = A^*$. □

Korollar 3.4.4. *Zu jedem $T \in B(H)$ gibt es genau einen adjungierten Operator.*

Beweis. Betrachte $\langle x, y\rangle = (Tx|y)$ und wende den letzten Satz an: es gibt genau ein $A \in B(H)$ mit $(Tx|y) = \langle x, y\rangle = (x|Ay)$, also $A = T^*$. □

Übung. Für $R, S \in B(H)$ gilt $(S^*)^* = S$, $(RS)^* = R^*S^*$, $(R+S)^* = R^* + S^*$, $(\lambda S)^* = \overline{\lambda}S^*\ \forall\lambda \in \mathbb{K}$, $\|S^*\| = \|S\|$, $\|S^*S\| = \|SS^*\| = \|S\|^2$ sowie ker $S^* = (SH)^\perp$, ker $S = (S^*H)^\perp$.

Neben den schon definierten selbstadjungierten Operatoren seien zwei weitere mit der Adjunktion * definierte Klassen von Operatoren im Hilbertraum erwähnt:

Definition 3.4.5. *Ein Operator $T \in B(H)$ heißt* **normal**, *wenn $TT^* = T^*T$ gilt. T heißt* **unitär**, *wenn $TT^* = T^*T = id_H$ gilt.*

Offenbar sind hermitesche (= selbstadjungierte) Operatoren und unitäre Operatoren normal.

Satz von Lax-Milgram

Satz 3.4.6 (Lax-Milgram). *Sei H ein Hilbertraum über $\mathbb{K}$ und $\langle\ ,\ \rangle : H \times H \to \mathbb{K}$ linear im ersten, antilinear im zweiten Argument. Es gebe Konstanten C und C', so daß $|\langle x,y\rangle| \leq C\|x\|\,\|y\|$ und $|\langle x,x\rangle| \geq C'\|x\|^2$ für alle $x,y,\in H$. Dann ist der wie im letzten Satz (Riesz II) definierte Operator A invertierbar (d.h. $\exists A^{-1} \in B(H)$ mit $AA^{-1} = A^{-1}A = id_H$) und es gilt $\|A^{-1}\| \leq \frac{1}{C'}$.*

Beweis. Sei A wie im Satz 3.4.3. Es gilt

$$C'\|x\|^2 \leq |\langle x,x\rangle| = |(x|Ax)| \leq \|x\|\,\|Ax\|,$$

also $C'\|x\| \leq \|Ax\|$. Deshalb ist A ein bi-stetiger Isomorphismus von H auf AH. Insbesondere ist AH abgeschlossen in H. Es gilt $AH = H$, denn aus $x \perp AH$ folgt insbesondere $0 = (x|Ax) = \langle x,x\rangle \geq C'\|x\|^2$, also $x = 0$. Somit ist A invertierbar, und wegen $\|x\| \leq \frac{1}{C'}\|Ax\|$ folgt $\|A^{-1}\| \leq \frac{1}{C'}$ (setze $x = A^{-1}y$). □

Eine Anwendung der Sätze von Riesz und Lax-Milgram.
Existenz schwacher Lösungen für gewisse Differentialgleichungen.

Vorbereitung (Sobolevraum H_2^1 auf $[0,1]$). Sei $I = [0,1]$ und sei H_2^1 der Raum der $f \in \mathcal{C}(I)$, deren Ableitung f' fast überall existiert und in $L^2(I)$ liegt sowie $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt$ erfüllt. Anders gesagt: Sei $H_2^1 = \{f \in \mathcal{C}(I) \mid \exists u \in L^2(I) \text{ mit } f(x) = f(0) + \int_0^x u(t)dt\ \forall\ x \in I\}$, wobei wir für u dann f' schreiben. Bezeichnet $(\ |\ )$ das Skalarprodukt in $L^2(I)$, so wird durch $(f|g)^1 = (f|g)+(f'|g')$ ein Skalarprodukt auf H_2^1 definiert. Die zugehörige Norm ist $\|f\|_2^1 = (\|f\|_2^2 + \|f'\|_2^2)^{1/2}$, und H_2^1 ist damit, wie leicht zu sehen, vollständig, also ein Hilbertraum. Der Unterraum $\overset{\circ}{H}{}_2^1 = \{f \in H_2^1 | f(0) = f(1) = 0\}$ ist abgeschlossen. Diesen Raum (Sobolevraum) werden wir benutzen. **Problemstellung.** Wir betrachten die Sturm-Liouville-Differentialgleichung $Lu = f$, wo $Lu = -(pu')' + qu$, $p \in \mathcal{C}^1(I), q \in \mathcal{C}(I)$. Das zugehörige Randwertproblem lautet: bei gegebenem $f \in \mathcal{C}(I)$ finde man $u \in \mathcal{C}^2(I)$ mit $Lu = f$ und $u(0) = u(1) = 0$. Damit u eine Lösung ist, genügt es (und ist notwendig), daß $\int_0^1 v\overline{Lu} = \int_0^1 v\bar{f}$ für alle $v \in \mathcal{C}^1(I)$ mit $v(0) = v(1) = 0$ gilt. Den Raum dieser Funktionen nennen wir $\mathcal{C}_0^1(I)$. Mit partieller Integration ergibt sich $\int_0^1 v\overline{Lu} = \int_0^1 v(-\overline{(pu')'} + \overline{qu}) = \int_0^1 (v'\overline{pu'} + v\overline{qu}) =: \langle v,u\rangle$. Eine Funktion $u \in \overset{\circ}{H}{}_2^1$ heißt schwache Lösung (da nur "schwach" differenzierbar), wenn $\langle v,u\rangle = \int v\bar{f}$ für alle $v \in \mathcal{C}_0^1$ gilt.

Satz 3.4.7. *Seien p,q und $\langle v,u\rangle$ wie oben und Re p, Re $q \geq c > 0$ auf I. Dann gilt:*

Zu $f \in L^1(I)$ gibt es genau eine schwache Lösung in $\overset{\circ}{H}{}_2^1$

Beweis. Für $u,v \in \overset{\circ}{H}{}_2^1$ gilt

$$\begin{aligned} |\langle v,u\rangle| &\leq \int_0^1 |v'\overline{pu'}| + \int_0^1 |v\overline{qu}| \leq \|p\|_\infty\,\|v'\|_2\,\|u'\|_2 + \|q\|_\infty\|v\|_2\|u\|_2 \\ &\leq \max\{\|p\|_\infty, \|q\|_\infty\} \cdot (\|v'\|_2^2 + \|v\|_2^2)^{1/2}(\|u'\|_2^2 + \|u\|_2^2)^{1/2} \\ &= \text{const}\|v\|_2^1\|u\|_2^1. \end{aligned}$$

Außerdem gilt

$$|\langle u, u\rangle| \geq |\mathrm{Re}\langle u, u\rangle| \geq \int_0^1 (|u'|^2 c + |u|^2 c) = c(\|u\|_2^1)^2.$$

Somit ist der Satz von Lax-Milgram anwendbar: $\langle v, u\rangle = (v|Au)$ mit einem (eindeutig bestimmten) invertierbaren $A \in B(H)$.

Für $f \in L^1(I)$ sei die Linearform F: $H_2^1 \to \mathbb{C}$ definiert durch $F(v) = \int_0^1 v\bar{f}$. Es gilt

$$\begin{aligned} |F(v)| \leq \|v\|_\infty \|f\|_1 &= \|f\|_1 \sup_{x\in I} |\int_0^x v'(t)dt| \leq \|f\|_1 \|\chi_I\|_2 \|v'\|_2 \\ &\leq \|f\|_1 \|v\|_2^1, \end{aligned}$$

also $F \in (H_2^1)'$. Nach dem Satz von Riesz gibt es genau ein $w \in H_2^1$ mit $F(v) = (v|w)^1$. Ein $u \in H_2^1$ ist genau dann eine schwache Lösung, wenn $(v|Au) = (v|w)$ für alle $v \in \mathcal{C}_0^1(I)$ gilt. Dies ist gleichbedeutend mit $Au = w$, da, wie man leicht sieht, $\mathcal{C}_0^1(I)$ dicht in H_2^1 ist. Somit ist $u = A^{-1}w$ die eindeutig bestimmte schwache Lösung des Randwertproblems. □

3.5 Übungen, Beispiele, Ergänzungen

Übung 3.5.1. *Man zeige: Ist G ein Prähilbertraum, so ist seine Vervollständigung $\hat{G}$ ein Hilbertraum.*

Übung 3.5.2. *Man zeige: Sind F und G Prähilberträume, so ist eine lineare Abbildung $T : F \mapsto G$ genau dann isometrisch, wenn sie das Skalarprodukt erhält: $(Tf_1|Tf_2) = (f_1|f_2)$ für alle $f_1, f_2 \in F$.*

Übung 3.5.3. *Man zeige: Ein Hilbertraum ist genau dann separabel, wenn seine Dimension, d.h. die Kardinalzahl einer Orthonormalbasis endlich oder abzählbar unendlich ist.*

Übung 3.5.4. *Beim Satz von Hahn-Banach und beim Satz von der Existenz einer Orthonormalbasis im Hilbertraum haben wir das Zornsche Lemma, also das Auswahlaxiom, benutzt. Man zeige: Wenn man sich auf separable Räume beschränkt, lassen sich die eben erwähnten Sätze auch ohne das Zornsche Lemma beweisen.*

Übung 3.5.5. *Man zeige: Jeder Hilbertraum ist reflexiv.*

Korollar 3.5.6. *Jede beschränkte Folge in einem Hilbertraum hat eine schwach konvergente Teilfolge (siehe Satz 2.3.15).*

Übung 3.5.7. *Sei H ein komplexer Hilbertraum. Man zeige, daß es auf H eine* **Konjugation** *gibt, d.h. eine antilineare isometrische Abbildung j von H in sich mit $j^2 = id_H$.*

Übung 3.5.8. *Seien F und G Prähilberträume und $T : F \to G$ antilinear und isometrisch. Man zeige, daß für alle $u, v \in F$ die Gleichung $(Tu|Tv) = (v|u)$ gilt.*

Übung 3.5.9. *Man zeige durch ein Beispiel, daß ein maximales Orthonormalsystem in einem Prähilbertraum nicht notwendig total ist. (Hinweis: Ausgehend von einem Hilbertraum samt Orthonormalbasis betrachte man den Kern eines geeigneten unstetigen linearen Funktionals).*

Übung 3.5.10. *Sei S ein ONS in einem Hilbertraum H. Für $x \in H$ seien in der Reihe $\sum_{e \in S}(x|e)e$ nur die Terme $\neq 0$ notiert (wegen der Besselschen Ungleichung höchstens abzählbar viele). Man zeige:*

(a) Die Reihe konvergiert unbedingt, d.h. auch jede Umordnung konvergiert, mit gleichem Grenzwert.

(b) Die Abbildung $P : x \mapsto \sum_{e \in S}(x|e)e$ ist die orthogonale Projektion auf $\overline{\mathrm{Lin} S}$.

Übung 3.5.11. *Man zeige: Ein unendlich-dimensionaler Hilbertraum H ist genau dann separabel, wenn $H \cong \ell^2 (= \ell^2(\mathbb{N}))$ gilt (isometrische Isomorphie).*

Übung 3.5.12. *Man zeige den Satz von Fischer-Riesz: $L^2(0, 1) \cong \ell^2$ (isometrische Isomorphie).*

Übung 3.5.13. *Für eine Funktion $f \in L^2([0, 1])$ und $n \in \mathbb{Z}$ ist*

$$\hat{f}(n) = \int_0^1 f(t)e^{-2\pi int}dt$$

ihr n-ter **Fourierkoeffizient**. *Man zeige, daß die* **Fouriertransformation**

$$\mathfrak{F} : f \mapsto \{\hat{f}(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$$

ein isometrischer Isomorphismus von $L^2([0, 1])$ auf $\ell^2(\mathbb{Z})$ ist.

Übung 3.5.14. *Man zeige: Eine Folge $\{x_n\}$ im Praehilbertraum G konvergiert genau dann gegen $x \in G$, wenn $\|x_n\| \to \|x\|$ und $x_n \overset{w}{\to} x$ gilt, wobei $x_n \overset{w}{\to} x$ schwache Konvergenz, also $(x_n|y) \to (x|y)\ \forall y \in G$ bedeutet.*

Übung 3.5.15. *Man zeige, daß für eine Reihe $\sum x_n$ mit paarweise orthogonalen x_n in einem Hilbertraum Folgendes gilt:*

$\sum x_n$ konvergiert $\Leftrightarrow \sum \|x_n\|^2 < \infty \Leftrightarrow \sum x_n$ konvergiert schwach.

Übung 3.5.16. *Sei H ein Hilbertraum und $T \in B(H)$. Man zeige: $\|T\| = \|T^*\|$ und $\|TT^*\| = \|T^*T\| = \|T\|^2$.*

Übung 3.5.17. *$T \in B(H)$ heißt* **normal**, *wenn $T^*T = TT^*$ gilt. Man zeige: T ist normal $\Leftrightarrow \|Tx\| = \|T^*x\|\ \forall x \in H$. Insbesondere gilt ker T = ker T^*, also auch ker $T = (TH)^\perp$.*

Übung 3.5.18. *Man zeige: Ist T normal, so gilt $\|T^n\| = \|T\|^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. (Hinweis: erst für $n = 2^k$ zeigen).*

Übung 3.5.19. *Man gebe ein Beispiel eines $T \in B(H)$, für welches die Behauptungen von 3.5.17 und 3.5.18 nicht zutreffen.*

Übung 3.5.20. *Sei M ein linearer Teilraum des Hilbertraums H. Ist $T \in B(H)$ mit $TM \subset M$, so gilt $T^*M^\perp \subset M^\perp$.*

Übung 3.5.21. *(Charakterisierung orthogonaler Projektionen) Sei M ein abgeschlossener Teilraum im Hilbertraum H und $P_M \in B(H)$ die orthogonale Projektion auf M. Man zeige:*

(a) $P_M^2 = P_M = P_M^*$.

(b) Ist $P \in B(H)$ mit $P^2 = P = P^*$, so ist P eine orthogonale Projektion, nämlich $P = P_N$, wo $N = PH$.

Wegen 3.5.17 genügt es bei (b) statt $P = P^*$ lediglich P normal anzunehmen.

Satz 3.5.22. *Ist $P \in B(H)$ eine Projektion (d.h. $P^2 = P$) mit $\|P\| \le 1$, so ist P eine orthogonale Projektion, also $P = P_{PH}$.*

Beweis. (a) Wegen $x = Px + (I - P)x \ \forall x \in H$ gilt $H = M + N$, wo $M = PH$, $N = (I-P)H$, und $y := Px - x \in N \ \forall x \in H$. Für $x \in N^\perp$ gilt somit $Px = y + x$ mit $(y|x) = 0$. Es folgt $\|y\|^2 + \|x\|^2 = \|Px\|^2 \le \|x\|^2$, also $y = 0$ und $Px = x$ für $x \in N^\perp$, d.h. $N^\perp \subset M$.

(b) Sei nun $m \in M$, also $Pm = m$ wegen $P^2 = P$. Da $H = N + N^\perp$ (denn N ist abgeschlossen in H wegen der Stetigkeit der Projektion $I - P$) gilt $m = n + n^\perp$ mit $n \in N$, $n^\perp \in N^\perp$, also $m = Pm = 0 + Pn^\perp = n^\perp \in N^\perp$ (da nach (a) $N^\perp \subset M$ und $P|_M = id_M$). Somit gilt $M \subset N^\perp$, also $M = N^\perp$ und $N = N^{\perp\perp} = M^\perp$, d.h. $P = P_M$. □

Übung 3.5.23. *Seien U, V abgeschlossene Teilräume eines Hilbertraumes H. Man zeige: $U \subset V \Leftrightarrow P_U = P_U P_V = P_V P_U$.*

Übung 3.5.24. *Die Adjungierte eines Operators $S \in B(H)$ lässt sich allgemeiner für Operatoren $S \in B(H,K)$ zwischen zwei Hilberträume H und K, ebenfalls mit Hilfe des Rieszschen Darstellungssatzes, definieren.*

Man zeige:

(a) Wie im Fall $H = K$ ist die Abbildung $S \mapsto S^*$ isometrisch und antilinear (d.h.: $(\lambda S + R)^* = \overline{\lambda} S^* + R^*$), nun aber von $B(H,K)$ nach $B(K,H)$, mit $\|S\|^2 = \|S^*S\| = \|SS^*\|$ $S^{**} = S$, und $\ker S^* = (SH)^\perp$, $\ker S = (S^*H)^\perp$. Für $S \in B(H,K), R \in B(K,L)$ gilt $(RS)^* = S^*R^*$.

(b) Sind j_1, j_2 die kanonischen antilinearen isometrischen Isomorphismen von H auf H' bzw. von K auf K', so gilt $S^* = j_1^{-1} S' j_2$, wobei S' der im Sinne von Kapitel 2 adjungierte Operator von S ist.

Übung 3.5.25. *Für $T \in B(H)$ zeige man:*

(a) Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ gilt

$$(Tx|x) \in \mathbb{R} \ \forall x \in H \ \Leftrightarrow T = T^*.$$

(b) Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ gilt das nicht (Gegenbeispiel).

Übung 3.5.26. *Für $T \in B(H)$ zeige man:*
(a) Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ gilt

$$(Tx|x) = 0 \; \forall x \in H \Rightarrow T = 0.$$

(b) Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ gilt das nicht (Gegenbeispiel). Fügt man aber die Voraussetzung $T = T^*$ hinzu, so gilt die in (a) genannte Implikation ebenfalls.

Übung 3.5.27. *Man zeige, daß für $T \in B(H)$ Folgendes äquivalent ist:*
(a) T ist unitär, d.h. $T^*T = TT^* = I = \mathrm{Id}_H$.
(b) T ist surjektiv und $\|Tx\| = \|x\| \; \forall x \in H$,
(c) T ist surjektiv und $(Tx|Ty) = (x|y) \; \forall \; x, y \in H$.

Übung 3.5.28. *Sei H ein Hilbertraum, Dim H seine Hilbertdimension, also die Kardinalität einer Orthonormalbasis von H, dim H seine Vektorraumdimension, also die Kardinalität einer Hamel-Basis von H.*
Man zeige:
(a) Ist Dim $H = \aleph_0$, also H separabel, so gilt $\aleph_1 \leq$ dim $H \leq c$, also Dim $H <$ dim H. (Hinweis: Kardinalität von H abschätzen.)
(b) Ist Dim $H = c$, so gilt auch dim $H = c$.