

# Kapitel 2

## Normierte Räume

### 2.1 Grundbegriffe

Sei  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  oder sei  $\mathbb{C}$  und  $E$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum.

**Definition 2.1.1.** Eine Norm auf  $E$  ist eine Abbildung  $\| \cdot \| : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \|x\|$  von  $E$  nach  $\mathbb{R}$  mit den Eigenschaften:

- (i)  $\|x\| \geq 0$ ,
- (ii)  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ,
- (iii)  $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ ,
- (iv)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  (Dreiecksungleichung)

für alle  $x, y \in E, \lambda \in \mathbb{K}$ .

Ist die Implikation  $\Rightarrow$  der Bedingung (ii) nicht notwendig erfüllt, so heißt die Abbildung  $x \mapsto \|x\|$  eine **Halbnorm** auf  $E$ . Ein Vektorraum mit einer Norm (Halbnorm) heißt **normierter (halbnormierter) Raum**.

**Bemerkung.** (a) Bedingung (i) oben ist überflüssig, da sie schon aus (iii) und (iv) folgt. Dasselbe gilt für die Implikation  $\Leftarrow$  von (ii), sie folgt aus (iii).

(b) Ist  $(E, \| \cdot \|)$  ein halbnormierter Raum und  $N = \{x \in E \mid \|x\| = 0\}$ , so ist  $(E/N, \| \cdot \|')$  mit  $\|x + N\|' := \|x\|$  ein normierter Raum.

(c) Jeder normierte (halbnormierte) Raum ist in natürlicher Weise ein metrischer (halbmetrischer) Raum. Man setze  $d(x, y) := \|x - y\|$ .

**Definition 2.1.2.** Ein normierter Raum, der als metrischer Raum vollständig ist, heißt **Banach-Raum**.

**Beispiele 2.1.3.** (a)  $\mathbb{K}$  mit  $\|x\| = |x|$  als Norm.

(b)  $\mathbb{K}^n$  mit der Norm  $\|x\|_p := (\sum_1^n |x_k|^p)^{1/p}$ , wobei  $1 \leq p < \infty$  eine feste Zahl ist.

(c)  $\ell^p := \{\{x_n\} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \sum_1^\infty |x_n|^p < \infty\}$  mit der Norm  $\|\{x_n\}\|_p := (\sum_1^\infty |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$ . Hier ist, wie in (b),  $p$  eine feste Zahl  $\geq 1$ .

(d)  $\ell^\infty$  mit der Norm  $\|\{x_n\}\|_\infty := \sup_n |x_n|$ .

(e)  $C([0, 1])$  mit der Norm  $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$ .

Die Beispiele (c) - (e) bildet man auch mit den entsprechenden reellen Folgen bzw. Funktionen. Oft läßt sich dem Zusammenhang entnehmen, ob gerade der reelle oder der komplexer Raum gemeint ist. Bei den Beispielen (b) und (c) ist der Beweis der Dreiecksungleichung im Fall  $p > 1$  nicht offensichtlich. Wir benutzen dazu folgendes

**Lemma 2.1.4.** *Seien  $a, b \geq 0$ ,  $p, q > 1$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Dann gilt:*

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$

*Beweis.* Ist  $a$  oder  $b$  gleich null, so ist die Behauptung erfüllt. Wir können also  $a, b > 0$  annehmen. Da der Logarithmus auf  $(0, \infty)$  eine konkave Funktion ist, gilt  $\log(\frac{1}{p}a + \frac{1}{q}b) \geq \frac{1}{p}\log a + \frac{1}{q}\log b = \log a^{1/p} + \log b^{1/q}$ . Anwendung der Exponentialfunktion liefert  $\frac{1}{p}a + \frac{1}{q}b \geq a^{1/p}b^{1/q}$ . Ersetzt man nun  $a$  durch  $a^p$  und  $b$  durch  $b^q$ , so erhält man die Behauptung.  $\square$

Nächster Schritt ist

**Satz 2.1.5 (Höldersche Ungleichung).** *Seien  $p, q > 1$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  und  $\{x_n\} \in \ell^p$ ,  $\{y_n\} \in \ell^q$ . Dann gilt:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leq \|\{x_n\}\|_p \|\{y_n\}\|_q.$$

*Beweis.* Ist eine der Normen auf der rechten Seite der Ungleichung null, so verschwinden alle Terme der linken Seite, womit die Behauptung erfüllt ist. Wir können also  $\|\{x_n\}\|_p, \|\{y_n\}\|_q > 0$  annehmen. Da die Ungleichung bei Multiplikation mit positiven Skalaren erhalten bleibt, genügt es, die Behauptung für  $\|\{x_n\}\|_p = \|\{y_n\}\|_q = 1$  zu zeigen. Nach obigem Lemma gilt  $|x_n y_n| \leq \frac{1}{p}|x_n|^p + \frac{1}{q}|y_n|^q$ , also

$$\sum_1^{\infty} |x_n y_n| \leq \frac{1}{p}\|\{x_n\}\|_q^q + \frac{1}{q}\|\{y_n\}\|_q^q = 1 = \|\{x_n\}\|_p \|\{y_n\}\|_q.$$

$\square$

Nun können wir die Dreiecksungleichung für  $\ell^p$  beweisen. Sie heißt **Minkowski-Ungleichung**.

**Satz 2.1.6 (Minkowski-Ungleichung).** *Sei  $1 < p < \infty$  und  $\{x_n\}, \{y_n\} \in \ell^p$ . Dann gilt  $\{x_n + y_n\} \in \ell^p$  und*

$$\|\{x_n + y_n\}\|_p \leq \|\{x_n\}\|_p + \|\{y_n\}\|_p$$

*Beweis.* Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  gilt:

$$\begin{aligned} |x_n + y_n|^p &= |x_n + y_n| |x_n + y_n|^{p-1} \\ &\leq (|x_n| + |y_n|) |x_n + y_n|^{p-1} \end{aligned} \tag{2.1.7}$$

Für  $q = \frac{p}{p-1}$  (dann ist  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ) gilt  $\{|x_n + y_n|^{p-1}\} \in \ell^q$  (wegen  $|x_n + y_n|^{(p-1)q} = |x_n + y_n|^p \leq (2 \max\{|x_n|, |y_n|\})^p \leq 2^p(|x_n|^p + |y_n|^p)$ ) Nach der Hölderschen Ungleichung gilt

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| |x_n + y_n|^{p-1} &\leq \|\{x_n\}\|_p \|\{|x_n + y_n|^{p-1}\}\|_q \\ &= \|\{x_n\}\|_p \|\{x_n + y_n\}\|_p^{p/q}, \end{aligned}$$

analog  $\sum_{n=1}^{\infty} |y_n| |x_n + y_n|^{p-1} \leq \|\{y_n\}\|_p \|\{x_n + y_n\}\|_p^{p/q}$ , und mit 2.1.7 erhalten wir  $\|\{x_n + y_n\}\|_p^p \leq (\|\{x_n\}\|_p + \|\{y_n\}\|_p) \cdot \|\{x_n + y_n\}\|_p^{p/q}$ , also  $\|\{x_n + y_n\}\|_p^{p - \frac{p}{q}} \leq \|\{x_n\}\|_p + \|\{y_n\}\|_p$ , was wegen  $p - \frac{p}{q} = 1$  gerade die Behauptung ist. Zuletzt haben wir implizit  $\|\{x_n + y_n\}\|_p \neq 0$  benutzt. Im Fall  $\|\{x_n + y_n\}\|_p = 0$  ist die Behauptung trivial erfüllt.  $\square$

Der soeben gegebene Beweis funktioniert auch für  $L^p$ -Funktionen auf einem beliebigen Maßraum, liefert also für allgemeines  $L^p$  die Dreiecksungleichung.

**Bemerkung.** (a) Ist  $E$  ein halbnormierter Raum über  $\mathbb{K}$ , so ist  $E$  mit der von der Halbnorm herrührenden (d.h. mit Hilfe der zugehörigen Halbmetrik definierten) Topologie ein **topologischer Vektorraum**, d.h. die Skalarmultiplikation und die Addition als Abbildungen von  $\mathbb{K} \times E$  nach  $E$  bzw. von  $E \times E$  nach  $E$  sind stetig.

(b) Ist  $M$  ein linearer Teilraum von  $E$ , so auch sein Abschluß  $\overline{M}$ . Dies folgt aus (a).

(c) Die Halbnorm  $\|\cdot\|$  auf  $E$  ist eine gleichmäßig stetige Abbildung von  $(E, \|\cdot\|)$  (als halbmetrischem Raum) nach  $\mathbb{R}$ , denn wegen der Dreiecksungleichung gilt:

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|.$$

(d) Aus der Dreiecksungleichung und der Stetigkeit der Halbnorm folgt: Ist  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  konvergent, so gilt  $\|\sum x_n\| \leq \sum \|x_n\|$ , wobei die rechte Seite der Ungleichung natürlich  $\infty$  sein kann.

(e)  $E$  ist vollständig genau dann, wenn jede absolut konvergente Reihe in  $E$  konvergiert. (Beweis siehe unten).

(f) Ist  $E$  ein normierter Raum, so ist  $\hat{E}$  (Vervollständigung als metrischer Raum) in natürlicher Weise ein Banachraum. Ist  $d$  die Metrik in  $\hat{E}$ , so setzt man

$$\|x^\sim\| := d(x^\sim, 0^\sim) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|,$$

wobei  $\{x_n\}$  eine Folge in  $E$  mit  $i(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x^\sim$  in  $\hat{E}$  ist.

*Beweis.* (für (e)):  $\Rightarrow$ : Ist  $E$  vollständig und  $\sum_1^\infty \|x_n\| < \infty$ , so sind die Partialsummen von  $\sum_1^\infty x_n$  wegen der Dreiecksungleichung offenbar eine Cauchyfolge, konvergieren also in  $E$ .

$\Leftarrow$ : Sei jede absolut konvergente Reihe in  $E$  konvergent und sei  $\{x_n\}$  eine Cauchyfolge in  $E$ . Es gibt eine Teilfolge  $\{x_{n_i}\}$  mit  $\|x_{n_i} - x_{n_{i+1}}\| < \frac{1}{2^i}$ . Da

$\sum_1^\infty \|x_{n_{i+1}} - x_{n_i}\| < \infty$  gilt, konvergiert die Reihe  $\sum_1^\infty (x_{n_{i+1}} - x_{n_i})$  in  $E$ , also auch  $x_{n_1} + \sum_{i=1}^\infty (x_{n_{i+1}} - x_{n_i})$ , deren  $k$ -te Teilsumme  $x_{n_{k+1}}$  ist. Also hat die ursprüngliche Cauchyfolge eine konvergente Teilfolge und ist somit selbst konvergent, was die Vollständigkeit von  $E$  beweist.  $\square$

**Proposition 2.1.8.** *Sei  $(E, \|\cdot\|)$  ein halbnormierter Raum und  $N$  ein linearer Teilraum von  $E$ .*

(i) *Der Quotientenraum  $E/N$  wird mit*

$$\|x + N\|' := \inf_{n \in N} \|x + n\|$$

*zu einem halbnormierten Raum  $(E/N, \|\cdot\|')$ . Dieser Raum ist genau dann normiert, wenn  $N$  abgeschlossen in  $E$  ist.*

(ii) *Ist  $E$  vollständig und  $N$  abgeschlossen, so ist  $E/N$  mit  $\|\cdot\|'$  ein Banachraum.*

*Beweis.* (i) Auf die Gleichung  $\|\lambda x + \lambda n\| = |\lambda| \|x + n\|$  wendet man  $\inf_{n \in N}$  an und erhält  $\|\lambda x + N\|' = |\lambda| \|x + N\|'$ . Auf die Ungleichung  $\|x + m + y + n\| \leq \|x + m\| + \|y + n\|$  wendet man  $\inf_{m, n \in N}$  an und erhält  $\|x + y + N\|' \leq \|x + N\|' + \|y + N\|'$ . Also ist  $\|\cdot\|'$  eine Halbnorm. Es gilt  $\|x + N\|' = 0$  genau dann, wenn  $x$  sich aus  $N$  approximieren lässt, also  $x \in \bar{N}$  gilt. Andererseits ist  $x + N$  die Null in  $E/N$  genau dann, wenn  $x \in N$  gilt. Also ist  $\|\cdot\|'$  genau dann eine Norm auf  $E/N$ , wenn  $\bar{N} = N$  gilt.

(ii) Seien  $x_k \in E$  mit  $\sum_1^\infty \|x_k + N\|' < \infty$  und seien  $n_k \in N$  so gewählt, dass  $\|x_k + n_k\| < \|x_k + N\|' + \frac{1}{2^k}$  gilt. Da  $E$  vollständig ist, folgt nach Bemerkung (e) oben die Konvergenz von  $\sum_1^\infty (x_k + n_k)$ , ihr Grenzwert sei  $z \in E$ . Die kanonische Projektion  $p : x \mapsto x + N$  von  $E$  nach  $E/N$  erfüllt  $\|p(x)\|' \leq \|x\|$ , ist also (sogar gleichmäßig) stetig. Somit gilt  $\sum_1^\infty (x_k + N) \rightarrow z + N$ , woraus nach Bemerkung (e) die Vollständigkeit von  $E/N$  folgt. Ist  $N$  abgeschlossen, so ist  $(E/N, \|\cdot\|')$  nach (i) auch normiert, also ein Banachraum.  $\square$

## 2.2 Lineare Operatoren

### Stetige lineare Operatoren

**Satz 2.2.1.** *Seien  $E$  und  $F$  halbnormierte Räume über  $\mathbb{K}$  und  $T : E \rightarrow F$  eine lineare Abbildung. Dann ist folgendes äquivalent:*

(i)  *$T$  ist stetig im Nullpunkt.*

(ii)  *$T$  ist stetig.*

(iii)  *$T$  ist gleichmäßig stetig*

(iv) *Es gibt eine Konstante  $C > 0$  mit  $\|Tx\|_F \leq C \cdot \|x\|_E$  (d.h.  $T$  ist „beschränkt“).*

*Beweis.* Die Implikationen (iv)  $\Rightarrow$  (iii)  $\Rightarrow$  (ii)  $\Rightarrow$  (i) sind klar. Wir zeigen noch (i)  $\Rightarrow$  (iv): Ist  $T$  stetig in 0, so gibt es zu  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  mit  $\|Tx\|_F \leq \varepsilon$  für

alle  $x \in E$  mit  $\|x\|_E \leq \delta$ . Für beliebiges  $x \neq 0 \in E$  hat  $\frac{\delta}{\|x\|_E}x$  die Länge (d.h. den Wert der Halbnorm)  $\delta$ , es gilt also

$$\|Tx\|_F = \left\| \frac{\|x\|_E}{\delta} T\left(\frac{\delta}{\|x\|_E}x\right) \right\|_F \leq \frac{\|x\|_E}{\delta} \cdot \varepsilon$$

d.h. mit  $C = \frac{\varepsilon}{\delta}$  ist (iv) erfüllt.  $\square$

Die Menge der **beschränkten Operatoren** von  $E$  nach  $F$ , d.h. der linearen Abbildungen  $T : E \rightarrow F$ , die (i) - (iv) oben erfüllen, bezeichnen wir mit  $\mathbf{B}(E, F)$ , und für  $T \in B(E, F)$  bezeichnen wir mit  $\|T\|$  die kleinste Konstante  $C$  mit  $\|Tx\|_F \leq C\|x\|_E$ . Wegen  $\|Tx\|_F \leq C\|x\|_E \Leftrightarrow \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} \leq C$  (für  $x \neq 0$ ) ist

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|_E=1} \|Tx\|_F = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|Tx\|_F = \sup_{\|x\|_E < 1} \|Tx\|_F.$$

**Bemerkung 2.2.2.** (a)  $(B(E, F), \|\cdot\|)$  ist ein halbnormierter Raum. Ist  $F$  normiert bzw. ein Banach-Raum, so ist es auch  $B(E, F)$ . Insbesondere ist  $E' := B(E, K)$  ein Banach-Raum. Er heißt der **Dualraum von E**, seine Elemente beschränkte lineare Funktionale.

(b) Sind  $E$  und  $F$  normierte Räume und  $T \in B(E, F)$ , so gibt es genau ein  $\hat{T} \in B(\hat{E}, \hat{F})$  mit  $\hat{T}|_E = T$ . Es gilt  $\|\hat{T}\| = \|T\|$ .

(c) Ist  $E$  normiert, so ist  $B(E, E)$  (oder auch kurz:  $B(E)$ ) eine **normierte Algebra**, d.h. ein normierter Raum und eine Algebra mit der Eigenschaft  $\|TS\| \leq \|T\| \|S\|$ . Ist  $E$  vollständig, so ist  $B(E)$  eine **Banach-Algebra**, d.h. eine (als normierter Raum) vollständige normierte Algebra.

## Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit

**Satz 2.2.3** (Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit). Seien  $E$  und  $F$  halbnormierte Räume,  $E$  vollständig, und  $\{T_\lambda\}$  eine Familie in  $B(E, F)$  mit

$$\sup_{\lambda} \|T_\lambda x\|_F < \infty \text{ für alle } x \in E.$$

Dann gilt:

$$\sup_{\lambda} \|T_\lambda\| < \infty.$$

*Beweis.* Sei  $A_n = \{x \in E \mid \|T_\lambda x\|_F \leq n \text{ für alle } \lambda\}$ . Nach Voraussetzung gilt  $\bigcup_n A_n = E$ , und da die Mengen  $A_n$  abgeschlossen in  $E$  sind, gibt es nach dem Satz von Baire ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $A_{n_0} \supset K_\varepsilon(x) = x + K_\varepsilon(0)$  für ein geeignetes  $x$  und  $\varepsilon$ . Für  $y \in K_\varepsilon(0) = K_\varepsilon(x) - x \subset A_{n_0} - A_{n_0}$  gilt  $\|T_\lambda y\|_F \leq n_0 + n_0$  für alle  $\lambda$ . Hieraus folgt  $\|T_\lambda\| \leq \frac{2n_0}{\varepsilon} < \infty$  für alle  $\lambda$ , was die Behauptung beweist.  $\square$

**Korollar 2.2.4** (Satz von Banach-Steinhaus). Sei  $E$  ein vollständiger halbnormierter Raum,  $F$  ein normierter Raum und  $\{T_n\}$  eine Folge in  $B(E; F)$ , so daß

$\{T_n x\}$  für jedes  $x \in E$  konvergiert. Dann ist die Abbildung

$$T : E \rightarrow F$$

$$x \mapsto Tx := \lim_{n \rightarrow \infty} T_n x$$

aus  $B(E, F)$

*Beweis.* Dass  $T$  linear ist, folgt aus  $\lim T_n(\alpha x + \beta y) = \alpha \lim T_n x + \beta \lim T_n y$  (hier benötigen wir übrigens, dass  $F$  normiert ist, da sonst die Limites nicht eindeutig bestimmen wären). Aus dem Prinzip der *gleichmäßigen Beschränktheit* erhalten wir  $C = \sup_n \|T_n\| < \infty$ , also  $\|Tx\|_F \leq C\|x\|_E$ .  $\square$

## Satz von der offenen Abbildung

**Satz 2.2.5** (Satz von der offenen Abbildung). *Sei  $E$  vollständig halbnormiert,  $F$  ein Banachraum und  $T \in B(E, F)$  surjektiv. Dann ist  $T$  offen, d.h. Bilder offener Mengen sind offen.*

*Beweis.* (a) Es genügt zu zeigen, dass für jedes  $s > 0$  die Menge  $TK_s(0)$  eine Kugel  $K_\eta(0)$  enthält, denn ist  $O \subset E$  offen,  $x \in O$  und  $K_s(x) \subset O$ , so folgt aus  $TK_s(0) \supset K_\eta(0)$  dass  $TO \supset TK_s(x) = T(K_s(0) + x) \supset K_\eta(0) + Tx$  gilt, also  $TO$  offen ist.

(b) Im Folgenden bezeichnen wir  $K_r(0)$  in  $E$  bzw.  $F$  kurz mit  $E_r$  bzw.  $F_r$ . Wir zeigen daß  $\overline{TE_r}$  eine Nullumgebung enthält. Wegen  $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} nE_{r/2}$  und der Surjektivität von  $T$  gilt  $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} nTE_{r/2}$ , es gibt also nach dem Satz von Baire ein  $n_0$  mit  $\overline{n_0 TE_{r/2}} \supset K_\delta(y)$  für geeignetes  $\delta > 0$  und  $y \in F$ . Nun gilt

$$K_\delta(0) = K_\delta(y) - y \subset \overline{n_0 TE_{r/2}} - \overline{n_0 TE_{r/2}} \subset \overline{TE_r},$$

Und da Skalarmultiplikation mit  $\frac{1}{n_0}$  ein Homöomorphismus ist, folgt

$$\overline{TE_r} \supset K_\varepsilon(0) = F_\varepsilon$$

für ein  $\varepsilon > 0$ .

(c) Wir behaupten nun  $TE_s \supset \overline{TE_r}$  für jedes  $s > r$  und beweisen dies mit einem iterativen Argument. Ist  $s > r$  und  $\{r_n\}$  eine Folge positiver Zahlen mit  $\sum_1^\infty r_n = s - r$ , so gibt es gemäß (b) zu jedem  $r_n$  ein geeignetes  $\varepsilon_n > 0$  mit

$$(i) \quad \overline{TE_{r_n}} \supset F_{\varepsilon_n} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

und wir können  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  annehmen. Sei nun  $y \in \overline{TE_r}$ . Es gibt  $x_1 \in E_r$  mit  $\|y - Tx_1\|_F < \varepsilon_1$ , also  $y - Tx_1 \in F_{\varepsilon_1}$ . Ist nun  $n - 1 \geq 1$ , sind  $x_1, \dots, x_{n-1}$  schon gewählt und ist  $\|y - \sum_{i=1}^{n-1} Tx_i\|_F < \varepsilon_{n-1}$ , also  $y - \sum_{i=1}^{n-1} Tx_i \in F_{\varepsilon_{n-1}}$ , so gibt es nach (i) ein  $x_n \in E_{r_{n-1}}$  mit  $\|(y - \sum_{i=1}^{n-1} Tx_i) - Tx_n\|_F < \varepsilon_n$ . Für die so induktiv definierte Folge  $\{x_i\}$  gilt

(ii)  $\sum_{i=1}^\infty \|x_i\|_E < r + \sum_{i=1}^\infty r_i = s$ . Da  $E$  vollständig ist, konvergiert  $\sum_{i=1}^n x_i$  gegen einen Grenzwert  $x \in \overline{E_s}$ .

(iii)  $\|y - \sum_{i=1}^n Tx_i\|_F < \varepsilon_n \rightarrow 0$ , also  $\sum_{i=1}^n Tx_i \rightarrow y$ . Da  $T$  linear und stetig ist, folgt  $Tx = y$ . Damit ist  $TE_s \supset \overline{TE_r}$  für  $s > r$  gezeigt und wegen (b) und (a) der Beweis beendet.  $\square$

**Bemerkung.** Der soeben bewiesene Satz gilt allgemeiner für  $F$ -Räume, d.h. topologische Vektorräume, die durch eine translationsinvariante Metrik vollständig metrisierbar sind, insbesondere für Frecheträume (das sind gerade die lokal konvexen  $F$ -Räume). Der Beweis bleibt gleich, wenn man Ausdrücke der Form  $\|a-b\|$  als  $d(a,b)$  und dementsprechend  $\|a\|$  als  $d(a,o)$  liest. Wie aus dem Beweis ersichtlich, braucht der Ausgangsraum  $E$  nicht separiert zu sein.

**Korollar 2.2.6.** *Seien  $E$  und  $F$  Banach-Räume und  $T \in B(E, F)$  bijektiv. Dann gilt:*

$$T^{-1} \in B(F, E),$$

*d.h. die Umkehrabbildung ist stetig, oder anders ausgedrückt: Es gibt ein  $C > 0$  mit  $\|Tx\|_F \geq C\|x\|_E$  für alle  $x \in E$ .*

**Korollar 2.2.7.** *Ist  $E$  mit jeder der beiden Normen  $\|\cdot\|_1$  und  $\|\cdot\|_2$  ein Banach-Raum und gilt  $\|\cdot\|_1 \leq C\|\cdot\|_2$ , so gilt auch*

$$\|\cdot\|_2 \leq C'\|\cdot\|_1.$$

## Satz vom abgeschlossenen Graphen

**Definition 2.2.8.** *Ist  $f : E \rightarrow F$  eine Abbildung, so heißt  $G_f := \{(x, f(x)) \in E \times F \mid x \in E\}$  der **Graph von  $f$** . Die Abbildung  $f$  heißt **abgeschlossen**, wenn ihr Graph als Teilmenge von  $(E \times F, \|\cdot\|)$ , wobei  $\|(x, y)\| := \|x\|_E + \|y\|_F$ , abgeschlossen ist.*

**Achtung:** *Diese Begriffsbildung ist inkonsequent, vgl. offene Abbildung.*

**Bemerkung.** Sind  $E$  und  $F$  normierte Räume und  $T \in B(E; F)$ , so ist  $T$  abgeschlossen. Für Banach-Räume gilt auch die Umkehrung:

**Satz 2.2.9** (Satz vom abgeschlossenen Graphen). *Seien  $E$  und  $F$  Banach-Räume und  $T : E \rightarrow F$  linear und abgeschlossen. Dann ist  $T$  stetig.*

*Beweis.* (a) Der Graph  $G_T$  ist ein linearer Teilraum von  $E \times F$ .

(b) Nach Voraussetzung ist  $G_T$  abgeschlossen in  $E \times F$ , und da  $E \times F$  ein Banach-Raum ist (leicht zu verifizieren), ist auch  $G_T$  ein Banach-Raum, mit der Norm  $\|(x, Tx)\| = \|x\|_E + \|Tx\|_F$ .

(c) Die Abbildung  $(x, Tx) \mapsto x$  von  $G_T$  nach  $E$  ist linear, bijektiv, und normvermindernd, also stetig. Nach dem Satz von der offenen Abbildung ist die Umkehrabbildung stetig, also aus  $B(E, G_T)$ . Es gibt somit ein  $C > 0$ , so dass  $\|x\|_E + \|Tx\|_F \leq C\|x\|_E$ , insbesondere  $\|Tx\|_F \leq C\|x\|_E$  gilt. Damit ist die Behauptung gezeigt.  $\square$

## 2.3 Die Sätze von Hahn-Banach

Um die Sätze von Hahn-Banach beweisen zu können, erinnern wir an das **Lemma von Zorn**. Sei  $(X, \leq)$  eine induktiv geordnete Menge, d.h. gelte

- (i)  $x \leq x$
- (ii)  $x \leq y, y \leq x \Rightarrow x = y$
- (iii)  $x \leq y, y \leq x \Rightarrow x \leq z$ .

und es gebe für jede total geordnete Teilmenge  $M \subset X$  eine obere Schranke  $x \in X$  ( $m \leq x$  für alle  $m \in M$ ). Dann besitzt  $X$  ein maximales Element  $z$  (d.h. es gibt kein größeres Element, also  $z \leq x \Rightarrow x = z$ ). Natürlich braucht dieses  $z$  nicht eindeutig bestimmt zu sein.

## Satz von Hahn-Banach, reelle Version

**Satz 2.3.1** (Satz von Hahn-Banach, reelle Version). *Sei  $E$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum,  $F$  ein linearer Teilraum und  $p : E \rightarrow \mathbb{R}$  subadditiv und positiv homogen, erfülle also  $p(x+y) \leq p(x)+p(y)$  und  $p(\lambda x) = \lambda p(x)$  für  $x, y \in E, \lambda > 0$ . Ist  $f : F \rightarrow \mathbb{R}$  ein lineares Funktional mit  $f(x) \leq p(x)$  für alle  $x \in F$ , so gibt es ein lineares Funktional  $\tilde{f} : E \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\tilde{f}|_F = f$  und  $\tilde{f}(x) \leq p(x)$  für alle  $x \in E$ . Ist  $p$  eine Halbnorm, so gilt automatisch  $|f| \leq p$  und  $|\tilde{f}| \leq p$ .*

*Beweis.* (a) Seien  $E, F, f$  und  $p$  wie oben und  $x \in E \setminus F, z, z' \in F$ . Es gilt  $f(z) + f(z') = f(z + z') \leq p(z + z') \leq p(z + x) + p(z' - x)$ , also

$$f(z') - p(z' - x) \leq -f(z) + p(z + x).$$

Die linke Seite dieser Ungleichung hängt von  $z'$ , die rechte von  $z$  ab, es gibt also eine Konstante  $c$ , die zwischen dem Supremum der linken und dem Infimum der rechten Seite liegt. Auf dem Raum  $F + \{\lambda x \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$  erklären wir  $\tilde{f}$  durch  $\tilde{f}(z + \lambda x) = f(z) + \lambda c$ . Wegen  $f(z) - p(z - x) \leq c \leq -f(z) + p(z + x)$  gilt

$$f(z) - c \leq p(z - x) \text{ und } f(z) + c \leq p(z + x).$$

Multiplizieren wir diese Ungleichungen mit  $\alpha > 0$  und ersetzen  $\alpha z$  durch  $z$ , so ergibt sich

$$\tilde{f}(z - \alpha x) \leq p(z - \alpha x) \text{ und } \tilde{f}(z + \alpha x) \leq p(z + \alpha x),$$

also  $\tilde{f}(z + \lambda x) \leq p(z + \lambda x)$  für  $\lambda \in \mathbb{R}$  (denn für  $\lambda = 0$  gilt die Ungleichung nach Voraussetzung).

Ergebnis: Wir haben  $f$  zu  $\tilde{f}$  auf dem Raum  $F + \{\lambda x \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$  fortgesetzt, und zwar so, dass die Fortsetzung  $\tilde{f}$  ebenfalls  $\tilde{f} \leq p$  erfüllt.

(b) Sei  $X$  die Menge aller Paare  $(G, g)$ , wobei  $G$  ein linearer Teilraum von  $E$  ist, der  $F$  enthält, und  $g : G \rightarrow \mathbb{R}$  ein lineares Funktional mit  $g|_F = f$  und  $g(x) \leq p(x)$  für alle  $x \in G$  ist. Wir erklären eine induktive Ordnung  $\leq$  durch

$$(G, g) \leq (G', g'), \text{ wenn } G \subset G' \text{ und } g'|_G = g \text{ ist.}$$

Ist  $M$  eine total geordnete Teilmenge von  $X$ , so ist  $(H, h)$  eine obere Schranke für  $M$ , wenn  $H = \bigcup_{(G, g) \in M} G$  und  $h(x) = g(x)$  für  $x \in G, (G, g) \in M$ . Man beachte, dass  $h$  wohldefiniert ist. Nach dem Lemma von Zorn gibt es in  $X$  ein maximales Element  $(K, k)$ . Nach (a) muss  $K = E$  gelten, weil wir sonst

noch um eine Dimension fortsetzen könnten, was der Maximalität von  $(K, k)$  widerspräche.

Ist  $p$  eine Halbnorm und  $f(y) \leq p(y)$ , so gilt auch  $-f(y) = f(-y) \leq p(-y) = p(y)$ , also  $|f(y)| \leq p(y)$ . Entsprechend für  $f$ .  $\square$

## Satz von Hahn-Banach, komplexe Version

**Satz 2.3.2** (Satz von Hahn-Banach, komplexe Version). *Sei  $E$  ein Vektorraum über  $\mathbb{C}$ ,  $F$  ein linearer Teilraum und  $p$  eine Halbnorm auf  $E$ . Ist  $f$  ein lineares Funktional auf  $F$  mit  $|f(x)| \leq p(x)$  für  $x \in F$ , so gibt es ein lineares Funktional  $\tilde{f}$  auf  $E$  mit  $\tilde{f}|_F = f$  und  $|\tilde{f}(x)| \leq p(x)$  für  $x \in E$ .*

*Beweis.* Sei  $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$  mit  $f_k(x) \in \mathbb{R}$ ,  $k = 1, 2$ . Dann sind  $f_1$  und  $f_2$   $\mathbb{R}$ -lineare Abbildungen von  $F$  nach  $\mathbb{R}$ , und es gilt  $|f_k(x)| \leq p(x)$  für  $k = 1, 2$ . Aus  $f(ix) = if(x)$  folgt  $f_2(x) = -f_1(ix)$ . Nach dem vorigen Satz gibt es eine reell-lineare Fortsetzung  $\tilde{f}_1 : E \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $|\tilde{f}_1(x)| \leq p(x)$  für  $x \in E$ . Setzen wir  $\tilde{f}(x) = \tilde{f}_1(x) - i\tilde{f}_1(ix)$ , so ist  $\tilde{f}$  eine Fortsetzung von  $f$ , außerdem  $\mathbb{C}$ -linear, wofür es genügt,  $\tilde{f}(ix) = i\tilde{f}(x)$  nachzuprüfen. Es bleibt noch  $|\tilde{f}(x)| \leq p(x)$  zu zeigen. Bei festem  $x$  ist für geeignetes  $t \in [0, 2\pi]$

$$\begin{aligned} |\tilde{f}(x)| &= \tilde{f}(x)e^{it} = \tilde{f}(e^{it}x) \geq 0, \text{ also} \\ |\tilde{f}(x)| &= \tilde{f}(e^{it}x) = \tilde{f}_1(e^{it}x) \leq p(e^{it}x) = p(x). \end{aligned}$$

Damit ist der Beweis beendet.  $\square$

## Folgerungen

**Korollar 2.3.3.** *Ist  $E$  ein halbnormierter Raum und  $F$  ein (linearer) Unterraum, so läßt sich jedes  $f \in F'$  zu einem  $\tilde{f} \in E'$  mit  $\|\tilde{f}\| = \|f\|$  fortsetzen.*

*Beweis.* Sei  $p(x) = \|f\| \|x\|$ . Dies ist eine Halbnorm, und es gilt  $|f(x)| \leq p(x)$  für  $x \in F$ . Es gibt ein Funktional  $\tilde{f}$  auf  $E$  mit  $\tilde{f}|_F = f$  und  $|\tilde{f}(x)| \leq p(x)$  für  $x \in E$ . Diese letzte Ungleichung besagt:  $\tilde{f} \in E'$  und  $\|\tilde{f}\| \leq \|f\|$ , und da natürlich  $\|\tilde{f}\| \geq \|f\|$  gilt, folgt  $\|\tilde{f}\| = \|f\|$ .  $\square$

**Korollar 2.3.4.** *Ist  $E$  ein halbnormierter Raum und  $x \in E$  mit  $\|x\| \neq 0$ , so gibt es ein  $f \in E'$  mit  $f(x) = \|x\|$  und  $\|f\| = 1$ .*

*Beweis.* Sei  $F = \{\lambda x \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$ . Wir definieren  $g(\lambda x) = \lambda \|x\|$ . Offenbar gilt  $g \in F'$ ,  $\|g\| = 1$ . Ist  $f$  eine Fortsetzung von  $g$  wie im vorigen Korollar, so ist damit die Behauptung erfüllt.  $\square$

**Bemerkung** Aus Korollar 2.3.4 ergibt sich insbesondere, dass der Dualraum  $E'$  eines halbnormierten Raumes  $E$  stets  $\neq \{0\}$  ist, außer im Trivialfall  $\| \cdot \|_E = 0$ .

**Korollar 2.3.5.** *Ist  $F$  ein abgeschlossener Teilraum des halbnormierten Raumes  $E$  und  $x \notin F$ , so gibt es ein  $g \in E'$  mit  $g|_F = 0$ ,  $g(x) = 1$ .*

*Beweis.* Betrachte  $E/F$ . Da  $\|x + F\| \neq 0$ , kann voriges Korollar auf  $E/F$  angewendet werden: Es gibt  $f \in (E/F)'$  mit  $f(x + F) \neq 0$ . Die Abbildung  $g : y \mapsto \frac{f(y+F)}{f(x+F)}$  genügt der Behauptung.  $\square$

Auch die Korollare (2.3.3)-(2.3.5) werden als **Hahn-Banach-Sätze** bezeichnet.

**Beispiele von Dualräumen** Das Zeichen  $\cong$  bedeutet im Folgenden isometrische Isomorphie d.h. Existenz einer isometrischen bijektiven linearen Abbildung zwischen den betreffenden Räumen.

- (a)  $c'_0 \cong \ell^1$  (wobei  $c_0 =$  Raum der Nullfolgen mit Supremumsnorm)
- (b)  $(\ell^1)' \cong \ell^\infty$
- (c)  $(\ell^p)' \cong \ell^q$  (wobei  $1 < p < \infty$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ )
- (d)  $C([0, 1])' \cong M([0, 1])$  (= Raum der beschränkten regulären Borel-Maße auf  $[0, 1]$ )
- (e)  $L^p([0, 1])' \cong L^q([0, 1])$  (wobei  $1 < p < \infty$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ )
- (f)  $L^1([0, 1])' \cong L^\infty([0, 1])$
- (g)  $(\mathbb{K}^n)' \cong \mathbb{K}^n$ .

In jedem der genannten Fälle definiert ein Element der Menge rechts vom Isomorphiezeichen in kanonischer Weise ein Element der linken Seite. Zum Beispiel im Fall (a) erhält man zu jedem  $g \in \ell^1$  ein Funktional  $\varphi_g \in c'_0$  durch die Definition  $\varphi_g(f) := \sum_{x \in \mathbb{N}} f(x)g(x)$ . Dass die Abbildung  $\varphi : g \mapsto \varphi_g$  von  $\ell^1$  nach  $c'_0$  ein isometrischer Isomorphismus ist, zeigt man leicht mit elementaren Methoden der Analysis. Entsprechendes gilt für (b). Bei den Fällen (d), (e), (f) werden die Funktional  $\varphi_g$  mit Integration statt Summation definiert und man benutzt Kenntnisse der Maßtheorie, bei (d) insbesondere den Rieszschen Darstellungssatz für stetige lineare Funktionale auf  $\mathcal{C}([0, 1])$ . (c) und (e) sind Spezialfälle eines allgemeinen Resultats der Maßtheorie: Für  $p, q > 1$  mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  und ein beliebiges Maß  $\mu$  gilt  $L^p(\mu)' \cong L^q(\mu)$ . Im Fall (g) gilt die isometrische Isomorphie, wenn  $\mathbb{K}^n$  mit der Norm  $\|\cdot\|_2$  versehen ist. Bei Verwendung einer anderen Norm kann man keine Isometrie erwarten, aber die Isomorphie bleibt erhalten. Ist  $\|\cdot\|$  eine beliebige Norm auf  $\mathbb{K}^n$ , so gibt es aber eine Norm  $\|\cdot\|'$  auf  $\mathbb{K}^n$  mit  $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)' \cong (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|')$  (isometrisch isomorph). Man erhält  $\|\cdot\|'$ , indem man die Norm auf dem Dualraum mit dem Isomorphismus  $\varphi$  transportiert, also  $\|g\|' := \|\varphi_g\|$  für  $g \in \mathbb{K}^n$  setzt. Sind  $p$  und  $q$  wie in (c) und ist  $\|\cdot\| = \|\cdot\|_p$ , so ist  $\|\cdot\|' = \|\cdot\|_q$ .

Wir geben für (c) noch einen direkten Beweis:

(i) Für  $g = \{g_n\} \in \ell^q$  und  $f = \{f_n\} \in \ell^p$  definiert  $\varphi_g(f) = \sum_1^\infty g_n f_n$  wegen der Hölderschen Ungleichung ein Funktional  $\varphi_g \in (\ell^p)'$  mit  $\|\varphi_g\| \leq \|g\|_q$ , und die Abbildung  $\varphi : g \mapsto \varphi_g$  von  $\ell^q$  nach  $(\ell^p)'$  ist injektiv, denn  $\varphi_g = 0$  impliziert  $g = 0$ .

(ii) Sei nun  $\psi \in (\ell^p)'$ , und sei  $g_n = \psi(e_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , wo  $e_n$  der  $n$ -te Einheitsvektor  $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$  ist. Für  $N \in \mathbb{N}$  sei  $f_n = |g_n|^q / g_n$  falls  $g_n \neq 0$ ,

sonst null. Für  $N \in \mathbb{N}$  gilt nun  $\sum_1^N |f_n|^p = \sum_1^N |g_n|^{p(q-1)} = \sum_1^N |g_n|^q$  und  $\sum_1^N |g_n|^q = \sum_1^N g_n f_n = \sum_1^N f_n \psi(e_n) = \psi(\sum_1^N f_n e_n) \leq \|\psi\| (\sum_1^N |f_n|^p)^{1/p} = \|\psi\| (\sum_1^N |g_n|^q)^{1/p}$ , also  $(\sum_1^N |g_n|^q)^{1-\frac{1}{p}} = (\sum_1^N |g_n|^q)^{\frac{1}{q}} \leq \|\psi\|$ . Somit gilt  $g = \{g_n\} \in \ell^q$  und wegen  $\psi(e_n) = g_n = \varphi_g(e_n)$   $\psi = \varphi_g$  auf dem dichten Teilraum  $\text{lin}\{e_n | n \in \mathbb{N}\}$ , also  $\psi = \varphi_g$  auf ganz  $\ell^p$ , denn beide Funktionale sind stetig. Dies und  $\|g\|_q \leq \|\psi\|$  zeigt zusammen mit (i), dass  $\psi : g \mapsto \varphi_g$  ein isometrischer Isomorphismus von  $\ell^q$  auf  $(\ell^p)'$  ist.

**Notation.** Ist  $E$  ein halbnormierter Raum,  $E'$  sein Dualraum,  $x \in E$  und  $x' \in E'$ , so schreiben wir für  $x'(x)$  auch  $\langle x, x' \rangle$ .

**Einbettung eines normierten Raumes in seinen Bidualraum.** Ist  $E$  ein normierter Raum, so gibt es eine kanonische Einbettung  $J$  (genauer  $J_E$ ) von  $E$  in seinen Bidualraum (oder: Bidual)  $E'' := (E')'$ . Für  $x \in E$  definiert man  $Jx \in E''$  durch  $(Jx)(x') := x'(x) = \langle x, x' \rangle$ , wobei  $x' \in E'$ . Die Abbildung  $J : E \rightarrow E''$ ,  $x \mapsto Jx$  ist linear und es gilt  $\|Jx\| \leq \|x\|$ . Nach Hahn-Banach gibt es zu  $x \neq 0 \in E$  ein  $x' \in E'$  mit  $\|x'\| = 1$  und  $\langle x, x' \rangle = \|x\|$ , also folgt  $\|Jx\| = \|x\|$ , d.h.  $J$  ist eine Isometrie, insgesamt also ein isometrischer Isomorphismus von  $E$  auf  $JE \subset E''$ .

## Adjungierte Abbildungen

Seien  $E, F$  halbnormierte Räume mit Dualräumen  $E', F'$ .

**Satz 2.3.6.** *Zu jedem  $A \in B(E, F)$  gibt es genau ein  $A' \in B(F', E')$  mit  $\langle Ax, y' \rangle = \langle x, A'y' \rangle$  für  $x \in E, y' \in F'$ . Es gilt  $\|A'\| = \|A\|$ .*

*Beweis.* Die Gleichung oben definiert  $A'y'$  als  $y' \circ A$ , woraus die erste Behauptung sowie  $\|A'\| \leq \|A\|$  folgt. Es ist

$$\begin{aligned} \|A'\| &= \sup_{\|y'\| \leq 1} \|A'y'\| = \sup_{\|y'\| \leq 1} \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle x, A'y' \rangle| \\ &= \sup_{\|x\| \leq 1} \sup_{\|y'\| \leq 1} |\langle Ax, y' \rangle| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| = \|A\|. \end{aligned}$$

Übrigens haben wir beim vorletzten Gleichheitszeichen den Satz von Hahn-Banach (Korollar 2.3.4) benutzt.  $\square$

**Definition 2.3.7.** *Der im letzten Satz definierte Operator  $A'$  heißt der zu  $A$  adjungierte (oder: konjugierte, duale) Operator.*

*Achtung: Im Hilbertraum wird der adjungierte Operator etwas anders definiert.*

**Bemerkung:** Wie aus der  $A'$  definierenden Gleichung hervorgeht, gilt  $(\text{Id}_X)' = \text{Id}_X$ , sowie  $(AB)' = B'A'$ , also ist  $'$  ein kontravarianter Funktor von der Kategorie der halbnormierten Räume in die Kategorie der Banachräume, jeweils mit den stetigen linearen Abbildungen als Morphismen. Insbesondere

ist für (stetig) invertierbares  $A \in B(E, F)$  auch  $A' \in B(F', E')$  invertierbar. Im Fall von Banachräumen  $E, F$  gilt auch die Umkehrung, wie wir in Kürze zeigen werden. Man benutzt als Hilfsmittel die kanonische Einbettung eines normierten Raumes  $E$  in seinen Bidualraum  $E''$ . Sind  $E, F$  normierte Räume mit kanonischen Einbettungen  $J_E, J_F$  in  $E''$  bzw.  $F''$ , und ist  $x \in E, y' \in F'$ , so gilt für  $T \in B(E, F)$ :

$$[T''(J_E x)](y') = (J_E x)(T' y') = \langle x, T' y' \rangle = \langle Tx, y' \rangle = [J_F(Tx)](y'), \text{ also}$$

$$T'' \circ J_E = J_F \circ T$$

Identifiziert man  $E, F$  vermöge  $J_E, J_F$  mit  $J_E E \subset E''$  bzw.  $J_F F \subset F''$ , so bedeutet die Gleichung, dass  $T''$  auf  $E$  mit  $T$  übereinstimmt.

**Satz 2.3.8.** *Seien  $E, F$  Banachräume und  $T \in B(E, F)$ . Es gilt:  $T$  ist invertierbar  $\Leftrightarrow T'$  ist invertierbar.*

*Beweis.* Wegen obiger Bemerkung ist nur noch  $\Leftarrow$  zu zeigen. Sei  $T'$  invertierbar, also auch  $T''$  invertierbar. Da  $T'$  injektiv ist, gilt  $\overline{T'E} = F$ . Da  $T''$  invertierbar ist, gilt  $c\|x''\| \leq \|T''x''\| \leq d\|x''\| \forall x'' \in E''$ , wo  $c = \|(T'')^{-1}\|^{-1}$ ,  $d = \|T''\|$ . Setzt man  $x'' = J_E x$  und berücksichtigt  $T''J_E = J_F T$ , so erhält man  $c\|x\| \leq \|Tx\| \leq d\|x\|$ . Also ist  $T$  bi stetig von  $E$  auf  $TE$ , mithin  $TE$  vollständig und somit abgeschlossen, also  $TE = \overline{TE} = F$ , und die Abbildung  $Tx \mapsto x$  ist stetig und invers zu  $T$ .  $\square$

**Definition 2.3.9.** *Seien  $E, F$  halbnormierte Räume. Für eine Teilmenge  $S \subset E$  heißt*

$$S^\circ := \{x' \in E' \mid \langle x, x' \rangle = 0 \forall x \in S\}$$

der **Annihilator** (oder: **Annulator**) von  $S$  in  $E'$ .

Für eine Teilmenge  $R \subset E'$  heißt

$${}^\circ R := \{x \in E \mid \langle x, x' \rangle = 0 \forall x' \in R\}$$

der **Annihilator** (oder: **Annulator**) von  $R$  in  $E$ .

**Bemerkung** (a)  $S^\circ$  und  ${}^\circ R$  sind abgeschlossene lineare Teilräume von  $E'$  bzw.  $E$ .

(b) Für beliebiges  $R \subset E'$  gilt  $({}^\circ R)^\circ \supset \overline{R}$  (dies folgt aus der Definition und (a)).

(c) Wenn  $S$  ein linearer Unterraum von  $E$  ist, gilt  ${}^\circ(S^\circ) = \overline{S}$  (Beweis mit Hahn-Banach, die Inklusion  $\supset$  ist klar nach Definition und (a)).

**Korollar 2.3.10.** *Für jedes  $A \in B(E, F)$  gilt  $N(A') = R(A)^\circ$  und  $\overline{R(A)} = {}^\circ N(A')$ , wobei  $N$  bzw.  $R$  Kern bzw. Bild eines Operators bezeichnet.*

*Beweis.* (i)  $N(A') = R(A)^\circ$ , denn  $y' \in N(A')$  gilt genau dann, wenn  $A'y' = 0$ , also  $\langle x, A'y' \rangle = \langle Ax, y' \rangle = 0 \forall x \in E$  gilt, d.h. wenn  $y'$  zum Annihilator  $R(A)^\circ$  gehört. (ii) Die Gleichheit  ${}^\circ N(A') = \overline{R(A)}$  folgt aus (i) und (c) der Bemerkung.  $\square$

## Reflexivität

**Definition 2.3.11.** Sei  $E$  ein normierter Raum,  $J$  seine kanonische Einbettung in  $E''$ .  $E$  heißt **reflexiv**, wenn  $J(E) = E''$  gilt, also  $J$  surjektiv ist.

**Bemerkung.** (a)  $E$  ist also genau dann reflexiv, wenn  $J$  ein isometrischer Isomorphismus von  $E$  auf  $E''$  ist.

(b) Ist  $E$  reflexiv, so ist es vollständig, also ein Banachraum. Denn die Dualräume halbnormierter Räume sind vollständig (Bemerkung 2.2.2 (a)).

**Satz 2.3.12.** Sei  $E$  ein Banachraum.  $E$  ist genau dann reflexiv, wenn sein Dualraum  $E'$  reflexiv ist.

*Beweis.* (i) Sei  $E$  reflexiv und  $x''' \in E'''$ . Dann ist  $x''' \circ J_E \in E'$ . Wir zeigen  $J_{E'}(x''' \circ J_E) = x'''$ . Sei  $x'' \in E''$ ,  $x'' = J_E x$  mit  $x \in E$ . Es gilt  $[J_{E'}(x''' \circ J_E)](x'') = x''(x''' \circ J_E) = (J_E x)(x''' \circ J_E) = (x''' \circ J_E)(x) = x'''(x)$ . Somit ist  $J_{E'}$  surjektiv, also  $E'$  reflexiv.

(ii) Sei  $E'$  reflexiv. Wäre  $E$  nicht reflexiv, so gäbe es ein  $x'' \in E'' \setminus J_E E$ . Nach Hahn-Banach existiert dann ein  $x''' = J_{E'} x' \in E'''$  mit  $x'''(x'') = \langle x', x'' \rangle = 1$  und  $x'''(J_E E) = \langle x', J_E E \rangle = \langle E, x' \rangle = 0$ , also  $x' = 0$ , ein Widerspruch. Folglich muss  $E$  reflexiv sein.  $\square$

**Satz 2.3.13.** Ist  $E$  reflexiv,  $M \subset E$  ein abgeschlossener Unterraum, so ist sowohl  $M$  als auch  $E/M$  reflexiv.

*Beweis.* (i) Jedes  $m'' \in M''$  definiert ein Funktional  $e(m'')$  auf  $E'$  durch  $e(m'')(\varphi) := m''(\varphi|_M)$  für  $\varphi \in E'$ . Wegen  $|m''(\varphi_\mu)| \leq \|m''\| \|\varphi|_M\| \leq \|m''\| \|\varphi\|$  ist  $e(m'')$  beschränkt, also in  $E''$ . Da  $E$  reflexiv ist, gibt es  $x \in E$  mit  $J_E x = e(m'')$ . Es gilt  $x \in M$ , denn wäre  $x \notin M$  gäbe es in  $\varphi \in E'$  mit  $\varphi(M) = 0$  und  $\varphi(x) = 1$ , also  $1 = \varphi(x) = J_E x(\varphi) = e(m'')(\varphi) = m''(\varphi|_M) = 0$ , was nicht sein kann. Wir zeigen  $J_M x = m''$ . Sei  $\psi \in M'$ ,  $\varphi \in E'$  eine Fortsetzung von  $\psi$  auf  $E$ . Nun gilt  $J_M x(\psi) = \psi(x) = \varphi(x) = J_E x(\varphi) = e(m'')(\varphi) = m''(\varphi|_M) = m''(\psi)$ , also  $J_M x = m''$ . Somit ist  $J_M$  surjektiv, also  $M$  reflexiv.

(ii) Wegen  $(E/M)' \cong M^\circ$  (vgl. Übung 2.4.23) und der Tatsache, dass  $M^\circ$  in  $E'$  abgeschlossen ist, folgt die Reflexivität von  $E/M$  aus (i) und dem Satz 2.3.12.  $\square$

## Schwache Topologie und Schwach\*-Topologie

Sei  $E$  ein normierter Vektorraum,  $E'$  sein Dualraum.

**Definition 2.3.14.** Die **schwache Topologie** auf  $E$  ist die von  $E'$  auf  $E$  induzierte Topologie, d.h. die grösste Topologie auf  $E$ , für die jedes  $x' \in E'$  eine stetige Abbildung ist. Die **schwach\*-Topologie** auf  $E'$  ist die von  $E$  auf  $E'$  induzierte Topologie, d.h. die grösste Topologie auf  $E'$ , so dass die Abbildung  $x' \mapsto (x, x')$  für jedes  $x \in E$  stetig ist. Auf dem Dualraum  $E'$  eines reflexiven Raumes  $E$  stimmen die beiden Topologien überein, da jedes  $x'' \in E''$  sich als Punktauswertung  $x' \mapsto x'(x)$  mit einem  $x \in E$  schreiben lässt.

**Bemerkung.** Ein Netz  $\{x_\alpha\}$  in  $E$  konvergiert schwach gegen  $x$  genau dann, wenn  $\langle x_\alpha, x' \rangle \rightarrow \langle x, x' \rangle$  gilt für jedes  $x' \in E'$ . Ein Netz  $\{x'_\alpha\}$  in  $E'$  konvergiert schwach\* gegen  $x'$  genau dann, wenn  $\langle x, x'_\alpha \rangle \rightarrow \langle x, x' \rangle$  gilt für jedes  $x \in E$ .

**Satz 2.3.15.** *In einem reflexiven Raum  $E$  hat jede beschränkte Folge  $\{x_n\}$  eine schwach konvergente Teilfolge.*

*Beweis.* Man kann  $E = F := \overline{\text{Lin}\{x_n | n \in \mathbb{N}\}}$  annehmen, denn wegen Hahn-Banach induzieren  $E'$  und  $F'$  die gleiche schwache Topologie auf  $F$ . Da  $F$  separabel und wegen 2.3.13 reflexiv ist, ist nach 2.4.18 auch  $F'$  separabel, es gibt also eine in  $F'$  dichte Folge  $\{\varphi_n\}$ . Die Folge  $\{\varphi_1(x_n)\}$  ist beschränkt, hat also eine konvergente Teilfolge  $\{\varphi_1(x_{1n})\}$ . Die Folge  $\{\varphi_2(x_{1n})\}$  hat eine konvergente Teilfolge  $\{\varphi_2(x_{2n})\}$  u.s.w. Für die "Diagonalfolge"  $\{x_{nn}\}$  ist dann  $\{\varphi_k(x_{nn})\}$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  konvergent. Sei nun  $\varphi \in F'$  beliebig und  $\varepsilon > 0$ . Für geeignetes  $k_0$  gilt  $\|\varphi - \varphi_{k_0}\| < \varepsilon/3c$  wo  $c = \sup_n \|x_n\|$ , und es gibt  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $|\varphi_{k_0}(x_{nn}) - \varphi_{k_0}(x_{mm})| < \frac{\varepsilon}{3} \forall n, m > n_0$ , also  $|\varphi(x_{nn}) - \varphi(x_{mm})| \leq |\varphi(x_{nn}) - \varphi_{k_0}(x_{nn})| + |\varphi_{k_0}(x_{nn}) - \varphi_{k_0}(x_{mm})| + |\varphi_{k_0}(x_{mm}) - \varphi(x_{mm})| < \frac{\varepsilon}{3c} \cdot c + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3c} \cdot c = \varepsilon$ , d.h.  $\{\varphi(x_{nn})\}$  ist eine Cauchyfolge in  $\mathbb{K}$  und somit konvergent. Die Abbildung  $\varphi \mapsto \lim \varphi(x_{nn}) = \lim(J_F x_{nn})(\varphi)$  ist nach Banach-Steinhaus ein Element  $\ell \in F''$ . Da  $F$  reflexiv ist, gilt  $\ell = J_F x$  für ein  $x \in F$ , also  $\varphi(x_{nn}) \rightarrow \varphi(x) \forall \varphi \in F'$ , d.h. die Teilfolge  $\{x_{nn}\}$  von  $\{x_n\}$  konvergiert schwach (gegen  $x$ ).  $\square$

*Da in reflexiven Räumen ( $E$  identifiziert mit  $JE = E''$ ) die schwache und die schwach\*-Topologie übereinstimmen, ist der schwache Abschluss  $K$  von  $\{x_n | n \in \mathbb{N}\}$  im obigen Satz gemäß dem Satz von Alaoglu (s. unten) kompakt (was ohne Reflexivität meist falsch wäre). Außerdem ist  $K$  mit der schwachen (= schwach\*-) Topologie metrisierbar, wie sich aus dem folgenden Satz mit  $F'$  (s. oben) anstelle von  $E$  ergibt.*

**Satz 2.3.16.** *Sei  $E$  ein separabler halbnormierter Raum und  $K \subset E'$  schwach\*-kompakt. Dann ist  $K$  in der schwach\*-Topologie metrisierbar.*

*Beweis.* Sei  $\{x_1, x_2, \dots\}$  eine dichte Teilmenge von  $E$ . Für  $n \in \mathbb{N}$  sei  $f_n = J_E x_n$ , also  $f_n(x') = \langle x, x' \rangle$  für  $x' \in E'$ . Die  $f_n$  sind schwach\*-stetige Funktionen auf  $E'$  und sie trennen Punkte von  $E'$ : Sind  $x', y' \in E'$  mit  $f_n(x') = f_n(y') \forall n \in \mathbb{N}$ , so folgt wegen der Dichtheit der  $f_n$  und der Normstetigkeit von  $x'$  und  $y'$ , dass  $\langle x, x' \rangle = \langle x, y' \rangle \forall x \in E$ , also  $x' = y'$  gilt. Die Metrisierbarkeit von  $K$  folgt nun aus Proposition 1.6.33  $\square$

**Satz 2.3.17** (Satz von Alaoglu). *Sei  $E$  ein normierter Vektorraum. Die abgeschlossene Einheitskugel des Dualraums  $S = \{x' \in E' | \|x'\| \leq 1\}$  ist schwach\*-kompakt.*

*Beweis.* Für  $x \in E$  sei  $A_x = \{\lambda \in \mathbb{K} | |\lambda| \leq \|x\|\}$  und  $A = \prod_{x \in E} A_x$ . Nach dem Satz von Tychonoff ist  $A$  (in der Topologie der koordinatenweisen Konvergenz) kompakt. Es gilt  $S \subset A$ , denn für  $f \in S$  gilt  $|f(x)| \leq \|x\|$ , also  $f(x) \in A_x$  für jedes  $x \in E$ . Die schwach\*-Topologie stimmt auf  $S$  mit der von  $A$  induzierten Topologie überein. Also brauchen wir nur noch die Abgeschlossenheit von  $S$  in

$A$  zu zeigen. Ist  $\{f_\lambda\}$  ein Netz in  $S$  mit  $f_\lambda \rightarrow f$  in  $A$ , so ist  $f$  wieder linear, und aus  $|f_\lambda(x)| \leq \|x\|$  folgt  $|f(x)| \leq \|x\|$ , also  $\|f\| \leq 1$ , d.h.  $f$  gehört zu  $S$ .  $\square$

## 2.4 Übungen, Beispiele, Ergänzungen

**Übung 2.4.1.** Zwei Normen  $\|\cdot\|_1$  und  $\|\cdot\|_2$  auf einem  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $E$  heißen äquivalent, wenn es Konstanten  $\alpha, \beta > 0$  gibt mit

$$\alpha\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta\|x\|_1$$

für alle  $x \in E$ . Man zeige, dass Normen genau dann äquivalent sind, wenn sie dieselben Topologien erzeugen (vgl. jedoch Übung 1.6.17 (b)).

**Übung 2.4.2.** Sei  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ . Man zeige: Alle Normen im  $\mathbb{K}^n$  sind äquivalent (Hinweis: Jede Norm  $\|\cdot\|$  lässt sich durch  $\|\cdot\|_1$  abschätzen, wobei für  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ :  $\|x\|_1 = \sum_1^n |x_i|$  ist. Die identische Abbildung

$$id : (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_1) \rightarrow (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$$

ist also stetig. Verwende nun die Kompaktheit der Einheitssphäre  $S = \{x \in \mathbb{K}^n \mid \|x\|_1 = 1\}$ , um  $\|\cdot\|_1$  durch  $\|\cdot\|$  abzuschätzen).

**Übung 2.4.3.** Man zeige: Jeder endlich-dimensionale Teilraum eines normierten Raumes ist abgeschlossen.

**Übung 2.4.4.** Man zeige, dass ein unendlichdimensionaler Banachraum keine abzählbare Vektorraumbasis haben kann.

**Übung 2.4.5.** Sei  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ ,  $\|\cdot\|$  eine Norm auf  $\mathbb{K}^n$  und  $T : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$  linear. Man zeige, dass  $T$  stetig ist.

**Übung 2.4.6.** (a) Sei  $E$  ein halbnormierter Raum über  $\mathbb{K}$ ,  $\varphi : E \rightarrow \mathbb{K}$  ein lineares Funktional. Man zeige:

$$\varphi \text{ ist stetig} \Leftrightarrow \varphi^{-1}(0) \text{ ist abgeschlossen.}$$

(b) Man gebe ein Beispiel, dass obige Aussage für beliebige lineare Abbildungen  $T : E \rightarrow F$  nicht richtig ist.

**Übung 2.4.7.** Sei  $E$  ein halbnormierter Raum,  $F$  ein Unterraum von  $E$  und sei  $\varphi \in F'$ . Nach Hahn-Banach lässt sich  $\varphi$  zu einem stetigen linearen Funktional auf ganz  $E$  fortsetzen. Man zeige:

(a) Diese Fortsetzung ist genau dann eindeutig bestimmt, wenn  $F$  dicht in  $E$  ist.

(b) Ist  $\bar{F} \neq E$ , so gibt es überabzählbar viele  $\psi \in E'$ , die  $\varphi$  fortsetzen.

**Übung 2.4.8.** Die im Hahn-Banach-Satz 2.3.1 erhaltene Fortsetzung  $\tilde{f}$  ist nicht nur wegen des Zornschen Lemmas keineswegs eindeutig bestimmt. Aber: Im Fall einer Halbnorm  $p$  auf  $E$  und einer in  $(E, p)$  dicht liegenden Folge  $\{x_n\}$  gebe man

ein Verfahren an, so dass jeder, der ausgehend von  $f$  diesem Verfahren folgt, dieselbe Fortsetzung  $\tilde{f}$  erhält.

**Bemerkung.** Es lässt sich vermuten, dass der Satz von Hahn-Banach 2.3.1 wie das Lemma von Zorn und der Satz von Tychonov äquivalent zum Auswahlaxiom sein könnte.

**Übung 2.4.9.** Sei  $E$  ein Vektorraum über  $\mathbb{C}$  und seien  $f_1, f_2$  reell lineare Funktionale von  $E$  nach  $\mathbb{R}$  und  $f(z) := f_1(z) + if_2(z)$  für  $z \in E$ . Man zeige:

(a)  $f$  ist  $\mathbb{C}$ -linear  $\Leftrightarrow f_2(x) = -f_1(ix) \forall x \in E$ .

(b) Ist  $E$  halbnormiert und  $f_1, f_2 \in E'$  (reeller Dualraum),  $f = f_1 + if_2$   $\mathbb{C}$ -linear, so gilt  $\|f\| = \|f_1\|$ .

**Übung 2.4.10.** Man gebe ein Beispiel, dass das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit nicht mehr gilt, wenn man den Ausgangsraum  $E$  der Operatoren  $T_\lambda : E \rightarrow F$  nicht mehr als vollständig voraussetzt.

**Übung 2.4.11.** Sind  $U, V$  Unterräume eines normierten Raumes  $(E, \|\cdot\|)$  mit der Eigenschaft, dass die Abbildung  $(u, v) \mapsto u + v$  von  $U \times V$  (mit der Norm  $\|(u, v)\|_1 = \|u\| + \|v\|$ ) nach  $E$  ein bistetiger Isomorphismus ist, so heißt  $E$  die **topologische direkte Summe** von  $U$  und  $V$ .

Man zeige: Ist ein Banachraum  $E$  die direkte Summe zweier abgeschlossener Teilräume  $U$  und  $V$ , so ist  $E$  die topologische direkte Summe von  $U$  und  $V$ .

**Übung 2.4.12.** Sei  $E$  ein normierter Raum und  $P : E \rightarrow E$  eine lineare Abbildung mit  $P^2 = P$ . Man nennt  $P$  dann eine (lineare) **Projektion**. Im Folgenden wird  $\text{id}_E$  mit  $I$  bezeichnet. Man zeige:

(a)  $I - P$  ist eine Projektion mit  $P(I - P) = (I - P)P = 0$  und  $PE = \text{Bild von } P = \ker(I - P)$  sowie  $(I - P)E = \text{Bild von } I - P = \ker P$ .

(b)  $E = PE \oplus (I - P)E$

(c) Ist  $P$  stetig, also in  $B(E)$ , so sind Bild und Kern von  $P$  abgeschlossen und es gilt eine Konstante  $d > 0$  mit

$$\|x\| \leq \|Px\| + \|(I - P)x\| \leq d\|x\| \quad \forall x \in E,$$

d.h.  $E$  ist die topologische direkte Summe von Bild und Kern von  $P$ .

(d) Ist  $E$  die topologische direkte Summe von abgeschlossenen Unterräumen  $U$  und  $V$ , so definiert die Abbildung  $x = u + v \mapsto u$  (bzw.  $x = u + v \mapsto v$ ), wo  $u \in U, v \in V$ , eine (lineare) stetige Projektion  $R$  (bzw.  $S$ ) mit  $S = I - R$ .

(e) Ist  $P \in B(E)$  eine Projektion  $\neq 0$ , so gilt  $\|P\| \geq 1$ .

**Übung 2.4.13.** Man gebe ein Beispiel einer unstetigen (linearen) Projektion auf einem Banachraum.

**Übung 2.4.14.** Auf  $\ell^2$  ist eine Norm gesucht, bezüglich der  $\ell^2$  vollständig ist, die aber zur üblichen Norm  $\|(x_n)\|_2 = (\sum_n |x_n|^2)^{\frac{1}{2}}$  nicht äquivalent ist.

**Übung 2.4.15.** Sei  $E$  der Raum  $C^1([0, 1])$  der einmal stetig differenzierbaren komplexen Funktionen auf  $[0, 1]$  aufgefasst als Unterraum von  $C([0, 1])$  mit der

Norm  $\|f\|_\infty = \max_{x \in [0,1]} |f(x)|$ . Die Ableitung  $f \mapsto f'$  ist eine lineare Abbildung  $D : C^1([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$ .

- (a) Man zeige, dass  $D$  abgeschlossen ist.  
 (b) Ist  $D$  stetig?

**Übung 2.4.16.** Sei  $c_0$  der Raum der komplexen Nullfolgen mit der Supremumsnorm  $\|(x_n)\|_\infty = \sup_n |x_n|$ . Man zeige, dass  $c'_0$  isometrisch isomorph zu  $\ell^1$  ist.

**Übung 2.4.17.** Ein topologischer Raum  $X$  heißt **separabel**, wenn es eine abzählbare dichte Teilmenge von  $X$  gibt.  $X$  erfüllt das **2. Abzählbarkeitsaxiom** (im Englischen:  $X$  heißt "second countable"), wenn seine Topologie eine abzählbare Basis besitzt, d.h. wenn es offene Mengen  $O_i$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , gibt, so dass jede offene Menge von  $X$  Vereinigung gewisser  $O_i$  ist.

Man zeige:

- (a) Aus dem 2. Abzählbarkeitsaxiom folgt die Separabilität von  $X$ .  
 (b) Ist  $X$  ein halbnormierter Raum, gilt auch die Umkehrung von (a).

**Übung 2.4.18.** Sei  $E$  ein halbnormierter Raum. Man zeige:  $E$  ist genau dann separabel, wenn es eine abzählbare Menge  $A \subset E$  mit  $\overline{\text{lin } A} = E$  gibt (wobei  $\text{lin } A$  das lineare Erzeugnis von  $A$  bezeichnet).

**Übung 2.4.19.** Sei  $E$  ein halbnormierter Raum.

- (a) Man zeige: Ist der Dualraum  $E'$  separabel, so auch  $E$ .  
 (Hinweis: Ist  $A \subset E'$  abzählbar und dicht, wähle man zu jedem  $a \in A$  ein  $x_a \in E$  mit  $\|x_a\| = 1$  und  $|a(x_a)| > \frac{1}{2}\|a\|$ . Wäre  $\text{lin}\{x_a | a \in A\}$  nicht dicht in  $E$ , mit Hahn-Banach einen Widerspruch folgern).  
 (b) Man gebe ein Beispiel dafür, dass die Umkehrung von (a) falsch ist.

**Übung 2.4.20.** Man zeige, dass es keinen isometrischen Isomorphismus zwischen  $(\ell^\infty)'$  und  $\ell^1$  gibt. Insbesondere ist  $\ell^1$  nicht reflexiv.

**Übung 2.4.21.** Ist  $\ell^\infty$  reflexiv?

**Übung 2.4.22.** Man zeige, dass jeder endlichdimensionale normierte Raum reflexiv ist.

**Übung 2.4.23.** Ist  $N$  ein Unterraum des halbnormierten Raumes  $E$ , so heißt  $N^0 = \{f \in E' | f(n) = 0 \text{ für alle } n \in N\}$  der Annulator von  $N$  in  $E'$ . Man zeige

$$(E/N)' \cong N^0 \text{ und } N' \cong E'/N^0 \text{ (isometrische Isomorphie).}$$

(Hinweis: Für  $\varphi \in (E/N)'$  die Abbildung  $\varphi \mapsto \varphi \circ p$  betrachten, wo  $p$  die kanonische Projektion von  $E$  auf  $E/N$  ist. Für  $\varphi \in E'$  die Abbildung  $\varphi \mapsto \varphi|_N$  betrachten.)

**Übung 2.4.24.** Sei  $E$  ein halbnormierter Raum. Man zeige: Ist  $E'$  separabel und  $B \subset E$  eine beschränkte Teilmenge, so hat jedes  $x \in B$  in der schwachen Topologie eine abzählbare Umgebungsbasis, d.h.  $B$  erfüllt mit der schwachen Topologie das **1. Abzählbarkeitsaxiom**.

**Übung 2.4.25.** Der Raum  $c_0$  der komplexen Nullfolgen ist ein Teilraum von  $\ell^\infty$ , also des Dualraumes von  $\ell^1$ . Man ermittle  $({}^0c_0)^0$ .

**Übung 2.4.26.** (Fastorthogonales Element) Sei  $F$  ein linearer Teilraum des halbnormierten Raumes  $E$  mit  $\overline{F} \neq E$  und sei  $\varepsilon > 0$ . Man zeige, dass es ein  $x \in E$  mit  $\|x\| = 1$  gibt, für das  $d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\| > 1 - \varepsilon$  gilt.

**Übung 2.4.27.** Welche Inklusion besteht zwischen der schwachen und der schwach\*-Topologie eines Dualraums?

**Übung 2.4.28.** Sei  $E$  ein halbnormierter Raum,  $E'$  sein Dualraum. Man zeige:

(a) Die abgeschlossene Einheitskugel von  $E'$  ist schwach abgeschlossen und schwach\* abgeschlossen.

(b) Jeder abgeschlossene Unterraum von  $E$  ist schwach abgeschlossen, aber nicht notwendig schwach\* abgeschlossen (Gegenbeispiel).

(c) Ein Unterraum von  $E$  ist genau dann abgeschlossen, wenn er schwach abgeschlossen ist.

**Übung 2.4.29.** Man zeige, dass ein normierter Raum mit der schwachen Topologie und, falls es ein Dualraum ist, auch mit der schwach\* Topologie ein topologischer Vektorraum ist, d.h. ein Vektorraum  $E$  mit einer Topologie  $\tau$ , für welche die Skalarmultiplikation und die Addition als Abbildung von  $\mathbb{K} \times E$  nach  $E$  bzw. von  $E \times E$  nach  $E$  stetig ist.

**Übung 2.4.30.** Sei  $(E, \tau)$  ein topologischer Vektorraum. Man zeige:

(a) Für  $A, B, C \subset E$  gilt  $\overline{A + B} \subset \overline{A + C}$ .

(b) Für  $A, B, C \subset E$ ,  $A$  offen, ist  $A + B$  offen.

(c) Für  $A \subset E$  mit  $\overset{\circ}{A} \neq \emptyset$  enthält  $A - A$  eine Nullumgebung.