Kapitel 1

Metrische Räume

1.1 Grundbegriffe

Definition 1.1.1. *Sei X eine nichtleere Menge. Eine Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}$ heißt eine* **Metrik** *(oder: Distanz, Abstand) auf X, wenn gilt:*

(i) $d(x,y) \geq 0$

(ii) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(iii) $d(x,y) = d(y,x)$

(iv) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ *(Dreiecksungleichung)*

für alle $x, y, z \in X$.

Verlangt man statt (ii) nur die schwächere Eigenschaft

(ii)' $d(x,x) = 0,$

so heißt d eine **Halbmetrik** *auf X .*

Ist d eine Metrik (Halbmetrik) auf X, so heißt (X,d) ein **metrischer (halbmetrischer) Raum**. *Wenn klar ist, welche Metrik (Halbmetrik) d betrachtet wird, spricht man auch einfach vom metrischen (halbmetrischen) Raum X.*

Bemerkung. (a) Die Bedingung (i) oben ist überflüssig, denn sie folgt aus (ii), (iii), (iv). (Setze $z = x$ in (iv).)

(b) Ist (X,d) ein halbmetrischer Raum und definieren wir eine äquivalenzrelation $\sim$ auf X durch die Aussage

$$x \sim y \;:\Leftrightarrow\; d(x,y) = 0$$

so ist der Raum $X^\sim$ der äquivalenzklassen von $\sim$ mit der Metrik $d^\sim(x^\sim, y^\sim) = d(x,y)$ ein metrischer Raum. (Zunächst stellt man fest, daß $d^\sim(x^\sim, y^\sim)$ wohldefiniert ist, also nicht von der Auswahl der Repräsentanten von $x^\sim$ und $y^\sim$ abhängt: für $a \in x^\sim$, $b \in y^\sim$ gilt $d(a,b) \leq d(a,x) + d(x,y) + d(y,b) = 0 + d(x,y) + 0$ und ebenso $d(x,y) \leq d(a,b)$, also $d(a,b) = d(x,y)$. Die Halbmetrikeigenschaften von $d^\sim$ folgen aus denen von d. Ist $d^\sim(x^\sim, y^\sim) = 0$, also $d(x,y) = 0$, so gilt $x \sim y$, also $x^\sim = y^\sim$. Somit ist $d^\sim$ eine Metrik auf $X^\sim$). Wir nennen $(X^\sim, d^\sim)$ den zu (X,d) gehörigen **metrischen oder separierten Raum**.

Beispiele 1.1.2. *(a) Die reellen Zahlen* $\mathbb{R}$ *mit der üblichen Metrik* $d(x,y) = |x-y|$.

(a′) Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ *mit der Metrik* $d(x,y) = |x-y|$.

(b) $\mathbb{R}^n$ *mit der Metrik* $d_p(\mathbf{x},\mathbf{y}) := (\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p)^{\frac{1}{p}}$, *wobei* p *eine feste reelle Zahl* ≥ 1 *ist. (d_2 heißt Euklidische Metrik).*

(b′) $\mathbb{C}^n$ *mit der Metrik wie in (b).*

(c) $\ell^p :=$ *Menge der komplexen Folgen* $\{x_n\}$ *mit der Eigenschaft* $\sum_1^\infty |x_n|^p < \infty$ *und der Metrik* $d_p(\{x_n\},\{y_n\}) = (\sum_1^\infty |x_n - y_n|^p)^{1/p}$.

(d) $\ell^\infty =$ *Menge der beschränkten komplexen Folgen mit der Metrik* $d_\infty(\{x_n\},\{y_n\}) = \sup_n |x_n - y_n|$.

(e) $\mathcal{C}[0,1] =$ *Menge der stetigen Funktionen von* $[0,1]$ *nach* $\mathbb{C}$ *mit der Metrik* $d_\infty(f,g) = \sup_{x\in[0,1]} \big|f(x) - g(x)\big|$. *Die Teilmenge der reellen Funktionen bezeichnen wir mit* $\mathcal{C}_\mathbb{R}[0,1]$.

(f) $\mathcal{C}[0,1]$ *mit der Metrik* $d(f,g) = \int_0^1 |f((x) - g(x)|dx$.

(f′) $\mathcal{C}[0,1]$ *mit der Metrik* $d_p(f,g) = \Big(\int_0^1 \big|f(x) - g(x)\big|^p\Big)^{\frac{1}{p}}$, *wo* $1 < p < \infty$.

(g) $\mathcal{R}[0,1] =$ *Menge der Riemann-integrierbaren Funktionen auf* $[0,1]$ *mit* $d(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|dx$.

(h) $\mathcal{L}^1([0,1]) =$ *Menge der Lebesgue-integrierbaren Funktionen auf* $[0,1]$ *mit* $d(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|dx$.

Im Fall von (b), (b'), (c) folgt die Dreiecksungleichung für $p > 1$ aus der in Abschnitt 2.1 bewiesenen Minkowski-Ungleichung, im Fall (f') analog dazu mit Integration statt Summation.
Die Beispiele $(a) - (f')$ sind metrische Räume, (g) und (h) lediglich halbmetrische Räume. Der zu $\mathcal{L}^1([0,1])$ gehörige separierte Raum wird mit $L^1([0,1])$ bezeichnet. Man bildet die Beispiele $(c) - (f')$ auch mit den entsprechenden reellen Folgen bzw. Funktionen.

1.2 Konvergenz in metrischen Räumen

Definition 1.2.1. *Eine Folge* $\{x_n\}$ *in einem halbmetrischen Raum* (X,d) **konvergiert** *gegen* $a \in X$ *(kurz:* $x_n \to a$ *oder* $\lim x_n = a$*), wenn die reelle Zahlenfolge* $\{d(x_n,a)\}$ *gegen Null konvergiert. Man nennt a dann Grenzwert (oder: Limes) der Folge* $\{x_n\}$. *Eine Folge in X heißt* **konvergent**, *wenn es einen Punkt in X gibt, gegen den sie konvergiert.*

Bemerkung. (a) Eine Folge in einem metrischen Raum hat höchstens einen Grenzwert. Denn gilt $x_1 \to a$ und $x_n \to b$, so folgt $0 \leq d(a,b) \leq d(a,x_n) + d(x_n,b) \to 0$, also $d(a,b) = 0$ und somit $a = b$.

(b) Für halbmetrische Räume ist diese Aussage falsch (siehe Übung 1.6.3)

Definition 1.2.2. *Eine Folge* $\{x_n\}$ *in* (X,d) *heißt* **Cauchy-Folge**, *wenn für jedes* $\varepsilon > 0$ *ein* $n_0 \in \mathbb{N}$ *existiert mit* $d(x_n,x_m) < \varepsilon$ *für alle* $n,m > n_0$.

Bemerkung. (a) Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge.

(b) Die Umkehrung ist falsch: Als Gegenbeispiel betrachte man $X = \mathbb{Q}$ (rationale Zahlen) mit $d(x,y) = |x-y|$. Die Folge $\{(1+\frac{1}{n})^n\}$ ist eine Cauchy-Folge, konvergiert aber nicht in $\mathbb{Q}$).

Definition 1.2.3. *Ein metrischer (oder halbmetrischer) Raum heißt* **vollständig**, *wenn jede Cauchy-Folge konvergiert.*

Bemerkung. (a) Von den in 1.1.2 genannten Beispielen, ausgenommen (f), (f') und (g), sind alle Räume vollständig.

(b) Ein halbmetrischer Raum (X,d) ist genau dann vollständig, wenn der zugehörige separierte Raum $(X^{\sim}, d^{\sim})$ vollständig ist.

Definition 1.2.4. *Eine Abbildung $f : (X,d) \to (Y,d')$ heißt* **Isometrie** *(oder isometrische Abbildung), wenn*

$$d'(f(x), f(y)) = d(x,y)$$

für alle $z, y \in X$ gilt.

Beispiel 1.2.5. *Die kanonische Projektion $z \mapsto z^{\sim}$ eines halbmetrischen Raumes (X,d) auf den zugehörigen separierten Raum $(X^{\sim}, d^{\sim})$ ist eine Isometrie.*

Bemerkung. Eine Isometrie zwischen metrischen Räumen ist stets injektiv. Für halbmetrische Räume ist das falsch. Hinreichend für die Injektivität einer Isometrie ist, daß der Ausgangsraum metrisch ist.

1.3 Einige Sätze und ihre Anwendungen

Satz über die Vervollständigung

Für den Beweis des folgenden Satzes wie auch sonst oft ist Folgendes nützlich.

Bemerkung. (a) Ist (X,d) ein halbmetrischer Raum und sind $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ Folgen in X mit $d(a_n, b_n) \to 0$, so ist $\{a_n\}$ eine Cauchyfolge (bzw. konvergent) genau dann, wenn $\{b_n\}$ es ist. Gilt $a_n \to a$, so auch $b_n \to a$.

(b) (i) Sind $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ Cauchy-Folgen, so ist $\{d(a_n, b_n)\}$ eine (reelle) Cauchy-Folge und somit in $\mathbb{R}$ konvergent.

(ii) Gilt $a_n \to a$ und $b_n \to b$ so folgt $d(a_n, b_n) \to d(a,b)$.

Beides folgt aus

(c) Für $a, b, x, y \in X$ gilt $|d(a,b) - d(x,y)| \leq d(a,x) + d(b,y)$ (Übung 1.6.2).

Satz 1.3.1 (Satz über die Vervollständigung)**.** *Ist (X,d) ein metrischer Raum, so gibt es einen vollständigen metrischen Raum $(\hat{X}, \hat{d})$ und eine Isometrie $i : X \to \hat{X}$, so daß es zu jedem $\hat{x} \in \hat{X}$ eine Folge $\{x_n\}$ in X mit $i(x_n) \to \hat{x}$ gibt (d.h. daß $i(X)$ dicht in $\hat{X}$ ist). Der Raum $(\hat{X}, \hat{d})$ heißt* **Vervollständigung** *von X und ist bis auf eine bijektive Isometrie eindeutig bestimmt. Oft fasst man X vermöge der Isometrie i als Teilmenge von $\hat{X}$ auf.*

Beweis. (a) Eindeutigkeit: Wenn $(\hat{X}, \hat{d})$ mit der Isometrie i sowie $(\overline{X}, \overline{d})$ mit der Isometrie j die oben erwähnte Eigenschaft besitzen, so ist $j \circ (i^{-1})$ eine Isometrie von $i(X)$ auf $j(X)$. Ist $\hat{x} \in \hat{X}$ und $\{x_n\}$ eine Folge in X mit $i(x_n) \to \hat{x}$, so setzen wir $k(\hat{x}) = \lim j(x_n)$. Die Abbildung k ist wohldefiniert (d.h. $k(\hat{x})$ hängt nicht von der Wahl von $\{x_n)$ ab) und wegen 1.3.2 (b) (ii) isometrisch von $\hat{X}$ auf $\overline{X}$. übrigens setzt k natürlich die Isometrie $j \circ (i^{-1})$ fort.

(b) Existenz der Vervollständigung $(\hat{X}, \hat{d})$:

(i) Sei Z die Menge aller Cauchyfolgen in X mit der Halbmetrik $d_Z(\{a_n\}, \{b_n\}) = \lim_{n\to\infty} d(a_n, b_n)$. (Der Limes existiert nach Bemerkung (b) oben). Für $x \in X$ sei $j(x)$ die konstante Folge $(x, x, x, ...) \in Z$. Offenbar ist j eine Isometrie von X nach Z. Zu $\{a_n\} \in Z$ und $\varepsilon > 0$ gibt es ein $x \in X$ mit $d_Z(\{a_n\}, j(x)) \leq \varepsilon$. (Ist $d(a_n, a_m) < \varepsilon \ \forall n, m \geq n_0$, so leistet $x = a_{n_0}$ das Gewünschte). Somit ist $j(X)$ dicht in Z. Nun zur Vollständigkeit von Z: Sei $\{A_m\}$ eine Cauchyfolge in Z und seien $x_m \in X$ so gewählt, daß $d_Z(A_m, j(x_m)) \leq \frac{1}{m}$ gilt. Nach (a) der Bemerkung oben ist $\{j(x_m)\}$ Cauchy-Folge in Z, also $\{x_m\}$ Cauchy in X. Sei A diese Cauchyfolge. Es gilt $d_Z(\{x_n\}, j(x_m)) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, x_m) \to 0$ für $m \to \infty$, d.h. $j(x_m) \to A$ in Z. Also $d_Z(A_m, A) \leq d_Z(A_m, j(x_m)) + d_Z(j(x_m), A) \to 0$, d.h. Z ist vollständig.

(ii) Sei $Z^\sim, d_Z^\sim)$ der zu (Z, d_Z) dazugehörige separierte Raum und p die kanonische Projektion $z \to z^\sim$ von Z auf $Z^\sim$- Dann ist $(Z^\sim, d_Z^\sim)$ ein vollständiger metrischer Raum und $i = p \circ j$ eine Isometrie von X auf einen dichten Teil von $Z^\sim$.

□

Bemerkung.

Für halbmetrische Räume (X, d) gilt eine schwächere Fassung des Vervollständigungssatzes. Der Beweis (b) oben (ohne (ii)) liefert, daß (Z, d_Z) ein vollständiger halbmetrischer Raum und $j : X \to Z$ eine injektive Isometrie auf einen dichten Teil von Z ist. Die Eindeutigkeit dieser Vervollständigung bis auf eine bijektive Isometrie geht allerdings verloren. An Beispielen sieht man, daß Z unnötig groß sein kann. Ist z.B. X ein zweipunktiger Raum mit der Nullmetrik, so ist das oben konstruierte Z überabzählbar, obwohl X selbst schon vollständig ist! Der metrische Raum $Z^\sim$ besteht in diesem Fall aber nur aus einem Punkt.

Banachscher Fixpunktsatz

Satz 1.3.2 (Banachscher Fixpunktsatz.)**.** *Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $T : X \to X$ eine Kontraktion, d.h. es gebe ein $q \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq q < 1$ und $d(Tx, Ty) \leq q \cdot d(x, y)$. Dann besitzt T genau einen Fixpunkt $a = Ta$ in X.*

Beweis. Sei $x \in X$ und $x_n = T^n x$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, Man zeigt zunächst, daß $\{x_n\}$ eine Cauchy-Folge ist. Hieraus folgt leicht die Behauptung.

(i) Für alle $n \geq m$ gilt: $d(T^n x, T^m x) \leq q^m \cdot d(T^{n-m} x, x)$

(ii) Es gilt:
$d(T^n x.x) \leq \sum_{j=1}^n d(T^j x, T^{j-1}x) \overset{\text{nach(i)}}{\leq} \sum_{j=1}^n q^{j-1} d(Tx,x) = \frac{1-q^n}{1-q} \cdot d(Tx,x)$

(iii) Nach (i) und (ii) gilt für alle $n \geq m$

$$d(T^n x, T^m x) \leq q^m \cdot \frac{1-q^{n-m}}{1-q} \cdot d(Tx,x),$$

also ist $\{T^n x\}$ eine Cauchy-Folge.

(iv) Da X vollständig ist, gibt es ein $a \in X$ mit $T^n x \to a$. Da T eine Kontraktion ist, gilt auch $T^{n+1}x \to Ta$, und somit $a = \lim T^n x = \lim T^{n+1} x = Ta$. Gilt $Tb = b$ für ein $b \in X$, so folgt $d(a,b) = d(Ta,Tb) \leq q \cdot d(a,b)$, also $d(a,b) = 0$, d.h. $a = b$. □

Bemerkung Da wir $T^n x \to a$ gezeigt haben, folgt aus (iii) des Beweises für $n \to \infty$ eine Abschätzung der Konvergenzgeschwindigkeit:

$$d(a, T^m x) \leq \frac{q^m}{1-q} d(Tx,x).$$

Eine Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes

Satz 1.3.3 (Satz von Picard-Lindelöf)**.** *Ist $A \subset \mathbb{R}^2$ das Rechteck $\{(\xi,\eta) | a < \xi < b, c < \eta < d\}$ und $F : A \to \mathbb{R}$ stetig und in der zweiten Variablen Lipschitz-beschränkt, d.h. gilt $|F(\xi,\eta_1) - F(\xi,\eta_2)| \leq C \cdot |\eta_1 - \eta_2|$, so ist für jeden Punkt $(x_0,y_0) \in A$ das Anfangswertproblem $y' = F(x,y), y(x_0) = y_0$ lokal eindeutig lösbar, d .h. es gibt ein Intervall $I = [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ und eine auf I definierte differenzierbare Funktion f mit $f(x_0) = y_0$ und $f'(x) = F(x, f(x))$ für alle $x \in I$, und ist g eine Funktion auf I mit denselben Eigenschaften, so gilt $f(x) = g(x)$ für alle $x \in I$.*

Beweis. Sei $(x_0,y_0) \in A$. Ist y eine Lösung des Anfangswertproblemss $y(x_0) = y_0$, $y' = F(x,y)$ auf einem Intervall I mit $x_0 \in I$, so ist $x \mapsto F(x,y(x))$ als Zusammensetzung stetiger Funktionen stetig auf I, und durch Integration erhalten wir $y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^x y'(t)dt = \int_{x_0}^x F(t,y(t))dt$ für $x \in I$, d.h. y ist eine (stetige) Lösung der Integralgleichung $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x F(t,y(t))dt$ auf I. Ist umgekehrt y eine stetige Lösung dieser Integralgleichung, so folgt $y(x_0) = y_0$ und durch Differentiation $y'(x) = F(x,y(x))$ für $x \in I$, d.h. y ist eine Lösung des oben genannten Anfangswertproblems auf I. Es genügt also, die eindeutige Lösbarkeit der Integralgleichung zu zeigen. Für $\varepsilon, h > 0$ mit $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \times [y_0 - h, y_0 + h] \subset A$ betrachten wir den Raum $X = \{f \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \big| |f - y_0| \leq h\}$, der bezüglich der Metrik d_∞ vollständig ist, denn jede Cauchyfolge $\{f_n\}$ in X konvergiert in $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$, und die Ungleichung $|f_n - y_0| \leq h$ bleibt im Limes erhalten, der Grenzwert von $\{f_n\}$ liegt also in X. Für $f \in X$ sei Tf definiert durch $Tf(x) = y_0 + \int_{x_0}^x F(t,f(t))dt$ für $x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$. Ist M das Maximum von $|F|$ auf $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \times [y_0 - h, y_0 + h]$ und $\varepsilon M \leq h$, so gilt

$|Tf - y_0| \leq \varepsilon M \leq h$, d.h. T bildet X in sich ab. Für $f, g \in X$ gilt $d_\infty(Tf, Tg) = \sup_{|x-x_0|\leq\varepsilon} |\int_{x_0}^x (F(t, f(t)) - F(t, g(t)))dt| \leq \sup_{|x-x_0|\leq\varepsilon} \int_{x_0}^x C|f(t) - g(t)|dt \leq \varepsilon C d_\infty(f, g)$. Wenn wir $\varepsilon < \min(\frac{1}{C}, \frac{h}{M})$ wählen, so ist T also eine Kontraktion, die X in sich abbildet, und nach dem Banachschen Fixpunktsatz gibt es genau ein $g \in X$ mit $Tg = g$. Die oben genannte Integralgleichung (und damit auch das ursprüngliche Anfangswertproblem) hat also auf $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ die eindeutig bestimmte Lösung g. □

Bemerkung. Der soeben bewiesene Satz handelt von reellen Funktionen, gilt aber entsprechend auch für komplexwertige oder allgemeine $\mathbb{R}^n$-wertige Funktionen. Für A nimmt man dann z.B. ein $n+1$-dimensionales Intervall $(a, b) \times (a_1, b_1) \times ... \times (a_n, b_n)$, für F eine stetige Abbildung von A nach $\mathbb{R}^n$. Damit wird y eine $\mathbb{R}^n$-wertige Funktion. Statt des Betrags auf $\mathbb{R}$ nimmt man auf $\mathbb{R}^n$ eine Norm (siehe Kapitel 2). Der Beweis des Satzes bleibt dann fast unverändert gültig.

Durch eine Metrik induzierte Topologie

Definition 1.3.4.
(a) Ist (X, d) ein halbmetrischer Raum, $x \in X$ und $\varepsilon > 0$, so heißt die Menge $K_\varepsilon(x) := \{y \in X|\ d(x, y) < \varepsilon\}$ die **(offene) Kugel** *um x mit Radius ε, oder einfach die ε-Kugel um x.*
(b) Eine Teilmenge O von (X, d), heißt **offen**, *wenn es zu jedem $x \in O$ ein $\varepsilon > 0$ mit $K_\varepsilon(x) \subset O$ gibt.*

Übung. Die Mengen $K_\varepsilon(x)$ sind offen (was die Bezeichnung "offene Kugel" rechtfertigt).

Bemerkung.
(a) (i) Ø und X sind offen.
(ii) Endliche Durchschnitte offener Mengen sind offen.
(iii) Beliebige Vereinigungen offener Mengen sind offen.
Die offenen Mengen bilden also eine Topologie, die Bezeichnung „offen“ ist somit gerechtfertigt.
(b) Komplemente offener Mengen heißen **abgeschlossen**. Aus (a) (i) - (iii) ergibt sich durch Komplementbildung:
(i) Ø und X sind abgeschlossen
(ii) Endliche Vereinigungen abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.
(iii) Beliebige Durchschnitte abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.

Übung. Die **(abgeschlossene) Kugel** $K'_\varepsilon(x) := \{y \in X|d(x, y) \leq \varepsilon\}$ ist abgeschlossen.

Proposition 1.3.5. *(Charakterisierung abgeschlossener Mengen durch Folgen). Sei (X, d) ein halbmetrischer Raum. Eine Teilmenge M von X ist genau dann abgeschlossen, wenn jeder Grenzwert einer Folge in M ebenfalls in M liegt.*

Beweis. Um einen Widerspruchsbeweis zu vermeiden, zeigen wir die äquivalenz der Negationen der beiden betrachteten Aussagen.

(i) Sei M nicht abgeschlossen, also $X \setminus M$ nicht offen. Dann gibt es ein $x \in X \setminus M$ mit $K_\varepsilon(x) \cap M \neq \varnothing\ \forall \varepsilon > 0$. Für $n = 1, 2, ...$ wähle man $x_n \in K_{1/n}(x) \cap M$. Es gilt $x_n \to x$, also ist wegen $x \in X \setminus M$ die Folgenbedingung für M nicht erfüllt.

(ii) Sei die Folgenbedingung für M nicht erfüllt, gebe es also $x_n \in M$ mit $x_n \to x \in X \setminus M$. Wegen $d(x_n, x) \to 0$ gilt $K_\varepsilon \cap M \neq \varnothing\ \forall \varepsilon > 0$. Somit ist $X \setminus M$ nicht offen, also M nicht abgeschlossen. □

Proposition 1.3.6. *(Zusammenhang zwischen Vollständigkeit und Abgeschlossenheit von Teilmengen) (i) Ist (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$ als Unterraum $(A, d|_{A\times A})$ vollständig, so ist A abgeschlossen in X.*

(ii) Ist (X, d) ein vollständiger halbmetrischer Raum und $A \subset X$ abgeschlossen, so ist $(A, d|_{A\times A})$ vollständig.

Beweis. (i) Sei unter den gegebenen Voraussetzungen $\{x_n\}$ eine Folge in A mit $x_n \to x \in X$. Dann ist $\{x_n\}$ eine Cauchyfolge und wegen der Vollständigkeit von A, gibt es ein $y \in A$ mit $x_n \to y$. Da d eine Metrik ist, folgt $x = y \in A$, also ist A nach 1.3.5 abgeschlossen.

(ii) Unter den gegebenen Voraussetzungen sei $\{x_n\}$ eine Cauchyfolge in A. Da X vollständig ist, gibt es $x \in X$ mit $x_n \to x$. Da A abgeschlossen ist, folgt aus 1.3.5 $x \in A$. Somit ist $(A, d|_{A\times A})$ vollständig. □

Folgerung. Ist (X, d) ein vollständiger metrischer Raum, so ist eine Teilmenge von X genau dann abgeschlossen, wenn sie als Unterraum vollständig ist.

Satz von Baire

Es sei zunächst an einige Definitionen der Topologie erinnert:

Definition 1.3.7. *Sei X ein topologischer Raum und M eine Teilmenge von X. Der* **Abschluss** *von M ist die kleinste abeschlossene Menge, die M enthält, und wird mit $\overline{M}$ bezeichnet. Das* **Innere** *(oder der* **offene Kern***) von M ist die größte offene Menge, die in M enthalten ist, und wird mit $\overset{\circ}{M}$ bezeichnet. M heißt nirgends dicht, wenn der Abschluß von M leeres Inneres hat, also $\overset{\circ}{\overline{M}} = \varnothing$ gilt. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt* **von 1. Kategorie***, wenn sie eine abzählbare Vereinigung nirgends dichter Teilmengen von X ist. Im anderen Fall heißt A* **von 2. Kategorie***.*

Satz 1.3.8 (Kategoriensatz von Baire)**.** *Jede nichtleere offene Teilmenge eines vollständigen halbmetrischen Raumes (X, d) ist von 2. Kategorie.*

Beweis. Sei O eine nichtleere offene Teilmenge von X, und $\{N_n\}$ eine Folge nirgends dichter abgeschlossener Teilmengen von X. Es gilt $O \not\subset N_1$ (da N_1 nirgends dicht ist). Also gibt es $x_1 \in O \setminus N_1$ und (da N_1 abgeschlossen ist) $\varepsilon_1 < 1$ mit $K'_{\varepsilon_1}(x_1) \subset O \setminus N_1$. Da $K_{\varepsilon_1}(x_1) \not\subset N_2$, gibt es $x_2 \in K_{\varepsilon_1}(x_1) \setminus N_2$ und $\varepsilon_2 < \frac{1}{2}$ mit $K'_{\varepsilon_2}(x_2) \subset K_{\varepsilon_1}(x_1) \setminus N_2$. Wir fahren per Induktion fort. Sind

$x_1, ..., x_n$ und $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n$ schon gewählt, so gilt $K_{\varepsilon_n}(x_n) \not\subset N_{n+1}$, es gibt also $x_{n+1} \in K_{\varepsilon_n}(x_n) \setminus N_{n+1}$ und $\varepsilon_{n+1} < \frac{1}{n+1}$ mit $K'_{\varepsilon_{n+1}}(x_{n+1}) \subset K_{\varepsilon_n}(x_n) \setminus N_{n+1}$. Wir erhalten so eine Folge $\{x_k\}$ mit $d(x_m, x_k) < \frac{1}{k}$ für $m \geq k$, also eine Cauchy-Folge. Da X vollständig ist, gibt es ein $x \in X$ mit $x_n \to x$. Da $x_k \in K'_{\varepsilon_n}(x_n)$ für alle $k > n$ und da $K'_{\varepsilon_n}(x_n)$ abgeschlossen ist, gilt $x \in K'_{\varepsilon_n}(x_n)$ für jedes n, also $x \in \cap_n K'_{\varepsilon_n} \subset O \setminus (\cup_n N_n)$. Das zeigt, daß O nicht von 1. Kategorie ist. □

Bemerkung. Insbesondere ist jeder nichtleere vollständige halbmetrische Raum von 2. Kategorie.

Eine Anwendung des Satzes von Baire

Satz 1.3.9. *Die Menge M der Funktionen $f \in \mathcal{C}([0,1])$, die in irgendeinem Punkt eine rechtsseitige Ableitung haben, ist von 1. Kategorie in $\mathcal{C}([0,1])$, also eine echte Teilmenge von $\mathcal{C}([0,1])$. Folglich gibt es stetige Funktionen auf $[0,1]$, die nirgends differenzierbar sind.*

Dieser Satz ist eine direkte Konsequenz des folgenden stärkeren Resultats:

Satz 1.3.10. *Die Menge M der $f \in \mathcal{C}[0,1]$, die in irgendeinem Punkt $t \in [0,1)$ eine rechtsseitige Lipschitz-Bedingung erfüllen (d.h. zu f gibt es L und $d > 0$ mit $|f(t+h) - f(t)| \leq L \cdot h \;\forall h \in [0,d]$), ist von 1. Kategorie, also eine echte Teilmenge von $\mathcal{C}[0,1]$. Es gibt also ein (tatsächlich sogar unendlich viele) $f \in \mathcal{C}[0,1]$, das in keinem $t \in [0,1)$ eine rechtsseitige Lipschitz Bedingung erfüllt, insbesondere also in keinem Punkt rechtsseitig differenzierbar ist.*

Beweis. Für $n = 1, 2, ...$ sei $N_n = \{f \in \mathcal{C}[0,1] | \;\exists t \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$ mit $|f(t+h) - f(t)| \leq nh \;\forall h \in [0, \frac{1}{n}]\}$. Erfüllt $f \in \mathcal{C}[0,1]$ eine rechtsseitige Lipschitz-Bedingung wie oben, so gilt $f \in N_n$ für genügend großes n, also $M \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} N_n$.

(a) N_n ist abgeschlossen: Seien $f_k \in N_n$ mit $f_k \to f \in \mathcal{C}[a,b]$. Es gibt $t_k \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$ mit $|f_k(t_k + h) - f_k(t_k| \leq nh$ für $h \in [0, \frac{1}{n}]$. Sei $(t_{k'})$ eine konvergente Teilfolge und $t = \lim_{k'} t_{k'}$. Es gilt $t \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$ und $|f_{k'}(t_{k'}) - f(t)| \leq |f_{k'}(t_{k'}) - f(t_{k'})| + |f(t_{k'}) - f(t)| \leq d_\infty(f_{k'}, f) + |f(t_{k'}) - f(t)| \to 0$ sowie für $h \in [0, \frac{1}{n}]$ analog $|f_{k'}(t_{k'} + h) - f(t+h)| \to 0$, also $|f(t+h) - f(t)| = \lim_{k'} |f_{k'}(t_{k'} + h) - f_{k'}(t_{k'})| \leq nh$ für $0 \leq h \leq \frac{1}{n}$. Somit ist $f \in N_n$ und damit N_n abgeschlossen.

(b) Sei $f \in N_n$ und $\varepsilon > 0$. Wir zeigen $K_\varepsilon(f) \not\subset N_n$, also $\mathring{N}_n = \varnothing$ d.h. N_n hat keine inneren Punkte. Es gilt $f = f_1 + if_2$ mit reellwertigen $f_i \in \mathcal{C}[a,b]$. Wir betrachten f_1. Da f_1 auf $[0,1]$ gleichmäßig stetig ist , gibt es ein $\delta > 0$ mit $|f_1(r) - f_1(s)| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $r, s \in [0,1]$ mit $|r - s| \leq \delta$. Indem wir δ (falls nötig) verkleinern, können wir annehmen, daß $\frac{1}{\delta} \in \mathbb{N}$ gilt. Dann ist $[0,1] = \bigcup_{k=0}^{\frac{1}{\delta}-1} [k\delta, (k+1)\delta]$ und auf $[k\delta, (k+1)\delta]$ gilt $f_1(k\delta) - \varepsilon/2 < f_1 < f_1(k\delta) + \varepsilon/2$. Man konstruiert nun (dies sei dem Leser überlassen) eine „Zackenfunktion“ z auf $[0,1]$, eine stückweise lineare (stetige) Funktion, die wie f_1 auf jedem Intervall $[k\delta, (k+1)\delta]$ ebenfalls $f_1(k\delta) - \frac{\varepsilon}{2} < z < f_1(k\delta) + \frac{\varepsilon}{2}$ erfüllt und deren geradlinige Segmente einen Anstieg $> n$ oder $< -n$ haben. Nun gilt $d_\infty(f, z + if_2) = d_\infty(f_1 + if_2, z + if_2) = d_\infty(f_1, z) < \varepsilon$, also $z + if_2 \in K_\varepsilon(f)$. Für beliebiges

$t \in [0,1)$ und genügend kleines $h > 0$ ergibt sich $|(z+if_2)(t+h)-(z+if_2)(t)| \geq |z(t+h)-z(t)| > nh$. Also gilt $z + if_2 \notin N_n$ und somit $K_\varepsilon(f) \not\subset N_n$. Somit ist N_n nirgends dicht und $M \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{N}$ von 1. Kategorie. □

1.4 Kompaktheit

Da (halb-)metrische Räume insbesondere topologische Räume sind, hat man den Begriff der Kompaktheit. Eine Teilmenge K von X heißt **kompakt**, wenn jede Überdeckung von K durch offene Teilmengen von X eine endliche Teilüberdeckung von K besitzt. Es gilt folgendes Kriterium:

Satz 1.4.1. *Eine Teilmenge K eines halbmetrischen Raumes (X, d) ist genau dann kompakt, wenn jede Folge in K eine in K konvergente Teilfolge enthält. (Für letztere Eigenschaft sagt man: K ist "folgenkompakt".)*

Beweis. "$\Rightarrow$" Sei K kompakt und $\{x_n\}$ eine Folge in K. Es gibt einen Häufungswert $x \in K$ (d.h. für jedes $\varepsilon > 0$ gilt $x_n \in K_\varepsilon(x)$ für unendlich viele Indizes n), denn sonst gäbe es zu jedem $y \in K$ ein $\varepsilon_y > 0$ mit $x_n \in K_{\varepsilon_y}(y)$ für höchstens endlich viele n, und die offene Überdeckung $\{K_{\varepsilon_y}(y)\}$ von K könnte keine endliche Teilüberdeckung haben, da $\mathbb{N}$ unendlich ist. Per Induktion wählt man nun eine Teilfolge $\{x_{n_k}\}$ mit $d(x_{n_k}, x) < \frac{1}{k}$ aus. Offensichtlich gilt $x_{n_k} \to x$ für $k \to \infty$

"$\Leftarrow$" Sei $\{O\}_{O\in\Omega}$ eine offene Überdeckung von K. Sei $x_1 \in K$ und $r(x_1) = \sup\{\varepsilon > 0 \mid \exists\, O \in \Omega \text{ mit } K_\varepsilon(x_1) \subset O\}$ Es gibt ein $O_1 \in \Omega$ mit $K_{r(x_1)/2}(x_1) \subset O_1$. Ist $x_2 \in K \setminus O_1$, so gibt es ein $O_2 \in \Omega$ mit $K_{r(x_2)/2}(x_2) \subset O_2$, und wenn Ω keine endliche Teilüberdeckung zuläßt, erhalten wir so per Induktion zwei Folgen $\{x_n\}$ und $\{O_n\}$ mit $x_n \notin \bigcup_{k<n} O_k$ und $K_{r(x_n)/2}(x_n) \subset O_n$. Es gilt $d(x_n, x_m) \geq \frac{1}{2} r(x_n)$ für $m > n$. Gibt es nun eine etwa gegen $x \in K$ konvergente Teilfolge $\{x_{n'}\}$, so folgt $r(x_{n'}) \to 0$. Das kann aber nicht sein, denn für $z \in K_{r(x)/2}(x)$ gilt $r(z) \geq r(x)/2$. Also lässt Ω eine endliche Teilüberdeckung zu, was die Kompaktheit von K zeigt. □

Bemerkung In allgemeinen topologischen Räumen gilt weder die Implikation "kompakt $\Rightarrow$ folgenkompakt"noch "folgenkompakt $\Rightarrow$ kompakt".

Definition 1.4.2. *Eine Teilmenge M eines halbmetrischen Raums X heißt* **beschränkt***, wenn es eine Kugel $K_r(a)$ in X gibt, die M enthält.*

Proposition 1.4.3. *(a) Jede kompakte Menge eines halbmetrischen Raums ist beschränkt.*

(b) Jede kompakte Menge eines metrischen Raums ist abgeschlossen.

Beweis. (a) Ist K kompakt und überdeckt man K mit den offenen Kugeln $K_1(x)$, $x \in X$, so genügen schon endlich viele davon zur Überdeckung, d.h. es gilt $K \subset \bigcup_{i=1}^n K_1(x_i)$ Ist $p \in X$ ein beliebiger Punkt und $r = \max_{1\leq i\leq n} d(p, x_i) + 1$, so gilt $K_1(x_i) \subset K_r(p)$ für jedes i, also $K \subset K_r(p)$, d.h. K ist beschränkt.

(b) Sei $K \subset X$ kompakt und $y \in X \setminus K$. Für $x \in K$ gilt $K_{d(x,y)/2}(x) \cap K_{d(x,y)/2}(y) = \varnothing$. Die $K_{d(x,y)/2}(x)$, $x \in K$, bilden eine offene Überdeckung von K, also genügen schon endlich viele $K_{d(x_1,y)/2}(x_1), ..., K_{d(x_n,y)/2}(x_n)$ zur Überdeckung. Ist $r_y = \min_{1 \le i \le n} d(x_i, y)/2$, so trifft $K_{r_y}(y)$ kein $K_{d(x_i,y)/2}(x_i)$, also auch K nicht, d.h. $K_{r_y}(y) \subset X \setminus K$. Da dies für jedes $y \in X \setminus K$ gilt, ist $X \setminus K$ offen, also K abgeschlossen. □

Wie aus dem Beweis ersichtlich, gilt (b) allgemeiner für alle Hausdorffschen (oder: separierten) Räume, d.h. topologische Räume, die das Hausdorffsche Trennungsaxiom T_2 erfüllen: zu Punkten $x \neq y$ gibt es Umgebungen U_x, U_y von x bzw. y mit $U_x \cap U_y = \varnothing$. (Es sei an den Umgebungsbegriff erinnert. U heißt Umgebung von x, wenn es eine offene Menge O mit $x \in O \subset U$ gibt.)

Bemerkung. Im (R^n, d_p) sind die kompakten Mengen genau die beschränkten und abgeschlossenen Mengen (Heine - Borel). Für beliebige metrische Räume ist das nicht mehr richtig. Um die Sache zu retten, benötigt man einen verschärften Beschränktheitsbegriff:

Definition 1.4.4. *Eine Teilmenge M von (X, d) heißt* **total beschränkt** *(oder* **präkompakt***), wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ endlich viele Punkte $x_1, \ldots, x_n \in X$ mit $M \subset \bigcup_1^n K_\varepsilon(x_i)$ gibt. (Man kann die x_i in M wählen, denn ausgehend von einer Überdeckung mit $\varepsilon/2$-Kugeln kann man eine Überdeckung mit ε-Kugeln gewinnen, deren Mittelpunkte in M liegen.)*

Bemerkung. Ist $M \subset X$ total beschränkt, so auch $\overline{M}$. Wird nämlich M von den Kugeln $K_\varepsilon(x_1), ..., K_\varepsilon(x_n)$ überdeckt, so gilt auch $M \subset \cup_{i=1}^n K'_\varepsilon(x_i) \subset \cup_{i=1}^n K_{2\varepsilon}(x_i)$. Die mittlere Menge ist abgeschlossen, enthält also auch $\overline{M}$. Somit gilt $\overline{M} \subset \cup_{i=1}^n K_{2\varepsilon}(x_i)$

Definition 1.4.5. *Eine Teilmenge eines halbmetrischen Raumes heißt* **relativ kompakt***, wenn ihr Abschluss kompakt ist.*

Proposition 1.4.6. *(a) Jede relativ kompakte Teilmenge eines halbmetrischen Raumes ist total beschränkt*

(b) Ist (X, d) vollständig, so gilt die Umkehrung von (a): jede total beschränkte Teilmenge ist relativ kompakt.

Beweis. (a) ist klar.

(b) Sei A (und somit auch $\overline{A}$) total beschränkt und sei $\{x_n\}$ eine Folge in $\overline{A}$. Da $\overline{A}$ von endlich vielen Kugeln mit Radius 1 überdeckt wird, muss eine davon, wir nennen sie K_1, unendlich viele Folgenglieder x_n enthalten. Da $\overline{A} \cap K_1 \subset \overline{A}$ sich mit endlich vielen Kugeln mit Radius $\frac{1}{2}$ überdecken lässt, gibt es eine solche Kugel, wir nennen sie K_2, so daß $(\overline{A} \cap K_1) \cap K_2$ unendlich viele x_n enthält. Per Induktion erhalten wir Kugeln K_i, $i \in \mathbb{N}$, mit Radien $\frac{1}{i}$, so daß $\overline{A} \cap K_1 \cap ... \cap K_i =: A_i$ unendlich viele x_n enthält. Wählt man nun $x_{n_i} \in A_i$ für $i \in \mathbb{N}$ mit $n_i > n_{i-1}$, so gilt für $i \geq k$ $d(x_{n_i}, x_{n_k}) \leq \frac{2}{k}$, d.h. $\{x_{n_i}\}$ ist eine Cauchyfolge. Sie konvergiert, da X vollständig ist, der Grenzwert liegt in $\overline{A}$. Somit ist $\overline{A}$ nach Satz 1.4.1 kompakt, also A relativ kompakt. □

Folgerung 1.4.7. *Eine Teilmenge eines vollständigen halbmetrischen Raumes ist genau dann relativ kompakt, wenn sie total beschränkt ist.*

Satz 1.4.8. *(Charakterisierung der Kompaktheit á la Heine-Borel). In einem vollständigen metrischen Raum ist eine Teilmenge genau dann kompakt, wenn sie total beschränkt und abgeschlossen ist.*

Beweis. Man füge auf beiden Seiten der äquivalenz der Folgerung die Aussage "und abgeschlossen" hinzu und benutze, daß "kompakt und abgeschlossen" im metrischen Raum dasselbe ist wie "kompakt". □

1.5 Stetigkeit

Definition 1.5.1. *Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen halbmetrischen Räumen X und Y heißt* **stetig in $\mathbf{x}_0 \in X$**, *wenn für jede Folge $\{x_n\}$ in X mit $x_n \to x_0$ gilt: $f(x_n) \to f(x_0)$. Man nennt f* **stetig**, *wenn es in jedem Punkt von X stetig ist.*

Bemerkung 1.5.2. *(a) Eine Abbildung) $f : X \to Y$ ist genau dann in $x_0 \in X$ stetig, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt mit $d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ für alle $x \in X$ mit $d_X(x, x_0) < \delta$.*

(b) f ist stetig genau dann, wenn Urbilder offener Mengen offen sind, d.h. wenn f im Sinne der Topologie stetig ist. (Übung 1.6.29) [äquivalent: wenn Urbilder abgeschlossener Mengen abgeschlossen sind.]

In diesem Zusammenhang sei an drei rein topologische Tatsachen erinnert:

(c) Das stetige Bild einer kompakten Menge K ist kompakt. (Denn ist f stetig und ist $f(K) \subset \cup_{O\in\Omega} O$ eine offene Überdeckung von $f(K)$, so ist $\cup_{O\in\Omega} f^{-1}(O) \supset K$ eine offene Überdeckung von K, also gibt es (da K kompakt) endlich viele $O_1, \ldots, O_n \in \Omega$ mit $K \subset \cup_{i=1}^n f^{-1}(O_i)$. Es folgt $f(K) \subset \cup_{i=1}^n ff^{-1}(O_i) \subset \cup_{i=1}^n O_i$. Also ist $f(K)$ kompakt.)

(d) Ist $K \neq \varnothing$ kompakt so nimmt jede stetige reellwertige Funktion f auf K ihr Maximum und Minimum an. (Denn $f(K)$ hat als nichtleere kompakt Teilmenge von $\mathbb{R}$ ein größtes und ein kleinstes Element).

(e) Seien X, Y topologische Räume, X kompakt, Y Hausdorffsch, und $f : X \to Y$ bijektiv und stetig. Dann ist auch f^{-1} stetig, also f ein Homöomorphismus. (Denn das Urbild $(f^{-1})^{-1}A = f(A)$ einer abgeschlossenen Menge A ist nach 1.6.26, (c) oben, und der Nachbemerkung zu Proposition 1.4.3 (b) abgeschlossen, also ist f^{-1} stetig).

Definition 1.5.3. *$f : X \to Y$ heißt* **gleichmäßig stetig**, *wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß aus $d_X(x, y) < \delta$ stets $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$ folgt.*

Beispiele 1.5.4. *(a) Jede Isometrie und jede Kontraktion ist gleichmäßig stetig.*

(b) Seien $(X, d), (Y, d')$ halbmetrische Räume und $f : X \to Y$ stetig. Ist X kompakt, so ist f gleichmäßig stetig.

Beweis. von (b). Seien $(X,d),(Y,d'),f$ wie vorausgesetzt und sei $\varepsilon > 0$. Für $x \in X$ gibt es ein $\delta_x > 0$ mit $d'(f(x),f(y)) < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $y \in K_{\delta_x}(x)$. Die Kugeln $K_{\delta_x/2}(x)$, $x \in X$, bilden eine offene Überdeckung von X. Da X kompakt ist, gibt es endlich viele $x_1,...,x_n \in X$ mit $K \subset \bigcup_{i=1}^n K_{\delta_{x_i}/2}(x_i)$. Sei $\delta = \min_{1\le i\le n}\delta_{x_i}/2$. Sind $x,y \in X$ mit $d(x,y) < \delta$ so gibt es ein $i \in \{1,...,n\}$ mit $x \in K_{\delta_{x_i}/2}(x_i)$. Es folgt $d(y,x_i) \le d(y,x)+\delta_{x_i}/2 \le \delta_{x_i}$. Somit gilt $d'(f(y),f(x)) \le d'(f(y),f(x_i))+ d'(f(x_i),f(x)) < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Die Abbildung f ist also gleichmäßig stetig. □

1.6 Übungen, Beispiele, Ergänzungen

Übung 1.6.1. *Sei (X,d) ein halbmetrischer Raum und $x_1,...,x_n \in X$. Man zeige*

$$d(x_1,x_n) \le \sum_{i=1}^{n-1} d(x_i,x_{i+1}).$$

Übung 1.6.2. *Man zeige: Ist (X,d) ein halbmetrischer Raum so gilt für alle $a,b,p,q \in X$*

$$|d(a,b)-d(p,q)| \le d(a,p)+d(b,q).$$

Übung 1.6.3. *Man zeige, daß eine Halbmetrik auf X genau dann eine Metrik ist, wenn jede Folge in X höchstens einen Grenzwert hat.*

Übung 1.6.4. *(a) Man zeige: Der Raum $C([0,1])$ der stetigen komplexen Funktionen auf dem Intervall $[0,1]$ wird mit $d(f,g) = \int_0^1 |f(x)-g(x)|dx$ zu einem metrischen Raum.*

(b) Ist dieser metrische Raum vollständig?

Übung 1.6.5. *Sei $1 \le p < \infty$. Man zeige, daßder Raum ℓ^p mit der Metrik $d_p(\{x_n\},\{y_n\}) = (\sum_{n=1}^\infty |x_n-y_n|^p)^{\frac{1}{p}}$ vollständig ist.*

Übung 1.6.6. *Sei $\mathcal{P}[0,1]$ der Raum der reellen Polynome auf $[0,1]$ mit der Supremumsmetrik $d_\infty(f,g) = \sup_{t\in[0,1]}|f(t)-g(t)|$. Man zeige, daß die Vervollständigung von $\mathcal{P}[0,1]$ der Raum der stetigen reellen Funktionen auf $[0,1]$ ist.*

Übung 1.6.7. *Sei (X,d) ein vollständiger metrischer Raum, T eine Abbildung von X in sich. Man zeige: Ist T^k für ein $k \in \mathbb{N}$ eine Kontraktion, so hat T genau einen Fixpunkt in X. Man zeige anhand eines Beispiels, daß der Banachsche Fixpunktsatz nicht für vollständige halbmetrische Räume gilt.*

Übung 1.6.8. *Leitet man den Satz von Picard-Lindelöf aus dem Banachschen Fixpunktsatz ab, so hängt das Definitionsintervall für die Lösung auch von der Lipschitzkonstante ab. Man kann das vermeiden, indem man eine andere (äquivalente) Metrik benutzt: $d(f,g) = \sup_{t\in I}|f(t)-g(t)|e^{-\lambda|t-t_0|}$, wobei man λ geeignet zu wählen hat. Man zeige dies. Der Einfachheit halber sei F stetig und beschränkt auf dem Definitionsbereich $(-1,1)\times\mathbb{R}$ und es werde das Anfangswertproblem $y' = F(x,y), y(0) = 0$ betrachtet.*

Übung 1.6.9. *Sei k eine stetige reelle Funktion auf dem Dreieck $\{(s,t) \in \mathbb{R}^2 |\ 0 \leq t \leq s \leq 1\}$ und sei $K : \mathcal{C}[0,1] \to C[0,1]$ definiert durch*

$$(Kx)(s) = \int_0^s k(s,t)x(t)dt$$

für $x \in \mathcal{C}[0,1]$, $s \in [0,1]$. Man zeige: für $n \in \mathbb{N}$ gilt $|(K^n x)(s)| \leq c_n s^n$ mit gewissen Konstanten c_n.

Übung 1.6.10. *Sei K wie in 1.6.9 und $g \in \mathcal{C}[0,1]$. Hat die Volterrasche Integralgleichung $x = Kx + g$ eine Lösung $x \in \mathcal{C}[0,1]$ und, falls ja, ist diese eindeutig?*

Übung 1.6.11. *Sei (X,d) ein halbmetrischer Raum, $p \in X$ und $r > 0$. Man zeige, daß die abgeschlossene Kugel $K'_r(p) = \{x \in X|\ d(p,x) \leq r\}$ nicht notwendig mit dem Abschluss $\overline{K_r(p)}$ der offenen Kugel $K_r(p)$ übereinstimmt. Welche Inklusion ist stets richtig?*

Übung 1.6.12. *Ist A eine Teilmenge des halbmetrischen Raumes (X,d), so nennt man $(A, d|_{A\times A})$ einen Unterraum von (X,d). Wenn man vom Unterraum A redet, meint man $(A, d|_{A\times A})$. Es soll gezeigt werden:*
Eine Menge $O \subset A$ ist offen in A genau dann, wenn es eine offene Menge $O' \subset X$ mit $O = O' \cap A$ gibt.

Übung 1.6.13. *Man zeige: Ist $X = \mathbb{R}^2$, $d((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = |x_1-y_1|+|x_2-y_2|$ und $A = \{(x,0)|\ x \in \mathbb{R}\}$, so ist die Menge $\{(y,0)|\ 0 < y < 1\}$ offen in A, nicht aber offen in X.*

Übung 1.6.14. *(Charakterisierung des Abschlusses einer Menge) Sei (X,d) ein halbmetrischer Raum und M eine Teilmenge von X. Man zeige, daß der Abschluss $\overline{M}$ gleich der Menge aller Grenzwerte von Folgen in M ist.*

Bemerkung *Insbesondere liefert 1.6.14 eine Charakterisierung dichter Teilmengen eines halbmetrischen Raumes X durch Folgen: M ist dicht in X (d.h. $\overline{M} = X$) genau dann, wenn jedes $x \in X$ Limes einer Folge in M ist.*

Übung 1.6.15. *Sei $X = \mathbb{R}^2$ mit der Euklidischen Metrik d_2. Man bestimme $\overline{A}$ für die Menge $A = \{(x, \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x})|x \in \mathbb{R}, x > 0\}$*

Übung 1.6.16. *Zwei Halbmetriken d und d' auf dem Raum X heißen äquivalent, wenn es positive Konstanten α und β gibt, so dass*

$$\alpha d(x,y) \leq d'(x,y) \leq \beta d(x,y) \qquad \text{für alle} \quad x,y \in X.$$

Man zeige: (a) Die soeben definierte Relation ist tatsächlich eine äquivalenzrelation.

(b) Folgende Metriken im $\mathbb{R}^n$ sind äquivalent: $d_1(x,y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$, $d_2(x,y) = \Big(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2\Big)^{1/2}$, $d_\infty(x,y) = \max_{1\leq i\leq n} |x_i - y_i|$.

Übung 1.6.17. *(a) Man zeige: Sind d und d' äquivalente Halbmetriken auf X, so sind sie auch 'topologisch äquivalent', d.h. sie erzeugen dieselbe Topologie, also dieselben offenen Mengen.*

(b) Man gebe ein Beispiel, daß zwei Metriken, welche dieselbe Topologie erzeugen, nicht äquivalent zu sein brauchen.

Übung 1.6.18. *Ist die Menge der irrationalen Zahlen in $\mathbb{R}$ von 1. oder 2. Kategorie?*

Übung 1.6.19. *Sei X ein vollständiger halbmetrischer Raum und $M \subset X$ von 1. Kategorie.*

(a) Man gebe ein Beispiel dafür, daß $X \setminus M$ eine Menge sein kann, die nur ein einziges Element enthält.

(b) Man zeige: Sind 1-punktige Teilmengen von X nirgends dicht, so ist $X \setminus M$ überabzählbar.

Übung 1.6.20. *Die Menge M der in irgendeinem Punkt differenzierbaren stetigen Funktionen auf $[0,1]$ ist gemäß Satz 1.3.9 von 1. Kategorie in $(\mathcal{C}[0,1], d_\infty)$. Man zeige, daß die Einheitssphäre $S = \{f \in \mathcal{C}[0,1] |\ d_\infty(f,0) = 1\}$ überabzählbar viele Elemente enthält, die nirgends differenzierbar sind. Man beachte, daß die bloße Aussage $''\mathcal{C}[0,1] \setminus M$ ist überabzählbar$''$ sehr viel schwächer ist, denn hierfür genügt es, z.B. die skalaren Vielfachen einer einzigen nirgends differenzierbaren Funktion vorzuweisen.*

Übung 1.6.21. *Man zeige, daß in $(\mathbb{R}^n, d_2)$ jede beschränkte Menge total beschränkt ist, die beiden Beschränktheitsbegriffe im $\mathbb{R}^n$ also übereinstimmen. (Zwei Beweismöglichkeiten bieten sich an).*

Übung 1.6.22. *Man zeige: Eine Teilmenge M eines metrischen Raumes X ist genau dann total beschränkt, wenn M als Teilmenge der Vervollständigung $\hat{X}$ relativ kompakt ist.(Letzteres erklärt die Bezeichnung "präkompakt").*

Übung 1.6.23. *Man zeige, daß eine Teilmenge M eines halbmetrischen Raumes X genau dann relativ kompakt ist, wenn jede Folge in M eine konvergente Teilfolge besitzt. (Die Implikation $\Rightarrow$ folgt schon aus Satz 1.4.1.*

Übung 1.6.24. *Man gebe ein Beispiel einer nicht abgeschlossenen kompakten Menge in einen halbmetrischen Raum.*

Übung 1.6.25. *Man zeige: Ist K eine kompakte Menge in einem halbmetrischen Raum, so ist auch $\overline{K}$ kompakt.*

Übung 1.6.26. *Man zeige, daß eine abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge kompakt ist.*

Übung 1.6.27. *(a) Man zeige, daß in metrischen Räumen Vereinigung und Durchschnitt zweier kompakter Mengen wieder kompakt ist. Für halbmetrische Räume ist die den Durchschnitt betreffende Aussage falsch:*

(b) Man gebe ein Beispiel zweier kompakten Teilmengen eines halbmetrischen Raumes, deren Durchschnitt nicht kompakt ist.

Das folgende Resultat ist für sich interessant und hat Anwendungen in der algebraischen Topologie.

Satz 1.6.28 (Lemma von Lebesque oder Münzwurf-Satz)**.** *Sei K eine kompakte Menge im halbmetrischen Raum (X, d). Ist Ω eine Menge offener Mengen, die K überdeckt, so gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit der Eigenschaft, daß jede Kugel $K_\varepsilon(x)$ mit $K_\varepsilon(x) \cap K \neq \emptyset$ ganz in einem $O \in \Omega$ enthalten ist.*

Beweis. Gilt $K \subset \bigcup_{O\in\Omega} O$, so bestimme man für jedes $x \in K$ ein $\delta_x > 0$ mit $K_{\delta_x}(x) \subset O$ für ein $O \in \Omega$. Die Überdeckung von K durch $K_{\delta_x/3}(x)$, $x \in K$, hat eine endliche Teilüberdeckung $K_{\delta_{x_1}/3}(x_1), ..., K_{\delta_{x_n}/3}(x_n)$. Sei $\varepsilon = \min_{1\leq i\leq n} \delta_{x_i}/3$. Ist nun $x \in X$ mit $K_\varepsilon(x) \cap K \neq \emptyset$, so trifft $K_\varepsilon(x)$ auch ein $K_{\delta_{x_i}/3}(x_i)$, $1 \leq i \leq n$. Ist $y \in K_\varepsilon(x) \cap K_{\delta_{x_i}/3}(x_i)$, so gilt für beliebiges $z \in K_\varepsilon(x) : d(z, x_i) \leq d(z, x) + d(x, y) + d(y, x_i) < \varepsilon + \varepsilon + \delta_{x_i}/3 \leq \delta_{x_i}$, also $K_\varepsilon(x) \subset K_{\delta_{x_i}}(x_i) \subset O$ für ein $O \in \Omega$. □

Übung 1.6.29. *Man zeige, daß für Abbildungen zwischen halbmetrischen Räumen die Definition der Stetigkeit durch Folgen ("Folgenstetigkeit") mit der topologischen Definition der Stetigkeit (Urbilder offener Mengen sind offen) übereinstimmt.*

Übung 1.6.30. *Sei $1 \leq p < \infty$. Auf $\mathcal{C}([0, 1])$ betrachten wir die Metriken $d_p(f, g) = (\int_0^1 |f(x) - g(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}$ und $d_\infty(f, g) = \max_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|$. Sei $T : \mathcal{C}([0, 1]) \to \mathbb{C}$ die Punktauswertung im Punkte 1, d.h. die Abbildung $f \mapsto Tf = f(1)$. Man zeige:*
(a) $T : (\mathcal{C}([0, 1]), d_\infty) \to \mathbb{C}$ ist stetig.
(b) $T : (\mathcal{C}([0, 1]), d_p) \to \mathbb{C}$ ist unstetig.
Hierbei sei $\mathbb{C}$ wie üblich mit der Metrik $d(\lambda, \mu) = |\lambda - \mu|$ versehen.

Übung 1.6.31. *Sei (X, d) ein halbmetrischer Raum und $X \times X$ mit der Metrik $d'((x, y), (x', y')) = d(x, x') + d(y, y')$ versehen. Man zeige, daß d eine gleichmäßig stetige Abbildung von $X \times X$ nach $\mathbb{R}$ ist,*

Übung 1.6.32. *Man zeige: Sind X und Y metrische Räume und $f : X \to Y$ eine gleichmäßig stetige Abbildung , so besitzt f genau eine stetige Fortsetzung $\hat{f} : \hat{X} \to \hat{Y}$. Die Abbildung $\hat{f}$ ist wieder gleichmäßig stetig.*

Proposition 1.6.33. *Sei X ein kompakter topologischer Raum. Gibt es eine Folge $\{f_n\}$ stetiger Funktionen auf X, die Punkte von X trennt (d.h. zu $x \neq y$ in X gibt es ein f_n mit $f_n(x) \neq f_n(y)$), so ist X metrisierbar, d.h. es gibt eine Metrik d auf X, deren zugehörige Topologie gleich der ursprünglichen Topologie von X ist.*

Beweis. Sei $\{f_n\}$ eine Folge mit den genannten Eigenschaften. Ohne Einschränkung können wir $|f_n| \leq 1\ \forall n \in \mathbb{N}$ annehmen. Durch $d(x, y) := \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n}|f_n(x) - f_n(y)|$ wird eine Metrik auf X definiert (da $\{f_n\}$ Punkte von X trennt), die als gleichmäßig konvergente Summe auf $X \times X$ stetiger Funktionen stetig auf $X \times X$ ist. Insbesondere ist $d_x : y \mapsto d(x, y)$ bei festem x stetig auf X, jede

Kugel $K_r(x)$ als Urbild von $(-\infty, r)$ unter d_x also offen in X. Es folgt, daß jede in (X, d) offene Menge offen in X ist, die Abbildung $id : X \to (X, d)$ also stetig ist. Nach 1.5.2 (e) ist auch deren Umkehrung stetig, und somit eine Menge genau dann in X offen, wenn sie in (X, d) offen ist. Die beiden Topologien stimmen also überein. $\square$