# Funktionalanalysis

Michael Leinert

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
HEIDELBERG

# Funktionalanalysis

MICHAEL LEINERT

# Funktionalanalysis

Herausgegeben von Marianne Hacker

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
HEIDELBERG

**ORCID®**
Michael Leinert https://orcid.org/0000-0002-3159-2454

**Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek**
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über https://dnb.dnb.de abrufbar.



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
HEIDELBERG

Publiziert bei heiBOOKS, 2025

Universität Heidelberg / Universitätsbibliothek
heiBOOKS
Grabengasse 1, 69117 Heidelberg, Germany
https://books.ub.uni-heidelberg.de/heibooks
E-Mail: ub@ub.uni-heidelberg.de

Die Online-Version dieser Publikation ist auf heiBOOKS, der E-Book-Plattform der Universitätsbibliothek Heidelberg, https://books.ub.uni-heidelberg.de/heibooks, dauerhaft frei verfügbar (Open Access).
urn: urn:nbn:de:bsz:16-heibooks-book-1611-1
doi: https://doi.org/10.11588/heibooks.1611



ISBN 978-3-911056-36-6 (PDF)

# Inhaltsverzeichnis

# Geleitwort

Michael Leinert war von 1980 bis 2010 Professor am Institut für Angewandte Mathematik der Universität Heidelberg. Nach seiner Emeritierung widmete er sich mit großer Leidenschaft der Verschriftlichung dieses Lehrbuchs. Verständlich und klar gegliedert sollte es Studentinnen und Studenten Zugänge zu den Gebieten der Funktionalanalysis, der Harmonischen Analyse sowie der Integrationstheorie und der Banach-Algebra eröffnen. Leider verstarb Michael Leinert kurz vor der Herausgabe seines Buches. Durch diese posthume Veröffentlichung wird ihm ein Herzenswunsch erfüllt.

Marianne Hacker (Ehefrau)

# Kapitel 1

# Metrische Räume

## 1.1 Grundbegriffe

**Definition 1.1.1.** *Sei $X$ eine nichtleere Menge. Eine Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}$ heißt eine* **Metrik** *(oder: Distanz, Abstand) auf $X$, wenn gilt:*

*(i)* $d(x, y) \geq 0$

*(ii)* $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

*(iii)* $d(x, y) = d(y, x)$

*(iv)* $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ *(Dreiecksungleichung)*

*für alle $x, y, z \in X$.*

*Verlangt man statt (ii) nur die schwächere Eigenschaft*

*(ii)'* $d(x, x) = 0,$

*so heißt $d$ eine* **Halbmetrik** *auf $X$ .*

*Ist $d$ eine Metrik (Halbmetrik) auf $X$, so heißt $(X, d)$ ein* **metrischer (halbmetrischer) Raum**. *Wenn klar ist, welche Metrik (Halbmetrik) $d$ betrachtet wird, spricht man auch einfach vom metrischen (halbmetrischen) Raum $X$.*

**Bemerkung.** (a) Die Bedingung (i) oben ist überflüssig, denn sie folgt aus (ii), (iii), (iv). (Setze $z = x$ in (iv).)

(b) Ist $(X, d)$ ein halbmetrischer Raum und definieren wir eine äquivalenzrelation $\sim$ auf $X$ durch die Aussage

$$x \sim y \;:\Leftrightarrow\; d(x, y) = 0$$

so ist der Raum $X^\sim$ der äquivalenzklassen von $\sim$ mit der Metrik $d^\sim(x^\sim, y^\sim) = d(x, y)$ ein metrischer Raum. (Zunächst stellt man fest, daß $d^\sim(x^\sim, y^\sim)$ wohldefiniert ist, also nicht von der Auswahl der Repräsentanten von $x^\sim$ und $y^\sim$ abhängt: für $a \in x^\sim$, $b \in y^\sim$ gilt $d(a, b) \leq d(a, x) + d(x, y) + d(y, b) = 0 + d(x, y) + 0$ und ebenso $d(x, y) \leq d(a, b)$, also $d(a, b) = d(x, y)$. Die Halbmetrikeigenschaften von $d^\sim$ folgen aus denen von $d$. Ist $d^\sim(x^\sim, y^\sim) = 0$, also $d(x, y) = 0$, so gilt $x \sim y$, also $x^\sim = y^\sim$. Somit ist $d^\sim$ eine Metrik auf $X^\sim$). Wir nennen $(X^\sim, d^\sim)$ den zu $(X, d)$ gehörigen **metrischen oder separierten Raum**.

**Beispiele 1.1.2.** *(a) Die reellen Zahlen* $\mathbb{R}$ *mit der üblichen Metrik* $d(x,y) = |x-y|$.

*(a′) Die komplexen Zahlen* $\mathbb{C}$ *mit der Metrik* $d(x,y) = |x-y|$.

*(b)* $\mathbb{R}^n$ *mit der Metrik* $d_p(\mathbf{x},\mathbf{y}) := (\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p)^{\frac{1}{p}}$, *wobei* $p$ *eine feste reelle Zahl* $\geq 1$ *ist. (*$d_2$ *heißt Euklidische Metrik).*

*(b′)* $\mathbb{C}^n$ *mit der Metrik wie in (b).*

*(c)* $\ell^p :=$ *Menge der komplexen Folgen* $\{x_n\}$ *mit der Eigenschaft* $\sum_1^\infty |x_n|^p < \infty$ *und der Metrik* $d_p(\{x_n\},\{y_n\}) = (\sum_1^\infty |x_n - y_n|^p)^{1/p}$.

*(d)* $\ell^\infty =$ *Menge der beschränkten komplexen Folgen mit der Metrik* $d_\infty(\{x_n\},\{y_n\}) = \sup_n |x_n - y_n|$.

*(e)* $\mathcal{C}[0,1] =$ *Menge der stetigen Funktionen von* $[0,1]$ *nach* $\mathbb{C}$ *mit der Metrik* $d_\infty(f,g) = \sup_{x\in[0,1]} \big|f(x) - g(x)\big|$. *Die Teilmenge der reellen Funktionen bezeichnen wir mit* $\mathcal{C}_\mathbb{R}[0,1]$.

*(f)* $\mathcal{C}[0,1]$ *mit der Metrik* $d(f,g) = \int_0^1 |f((x) - g(x)|dx$.

*(f′)* $\mathcal{C}[0,1]$ *mit der Metrik* $d_p(f,g) = \left(\int_0^1 \big|f(x) - g(x)\big|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, *wo* $1 < p < \infty$.

*(g)* $\mathcal{R}[0,1] =$ *Menge der Riemann-integrierbaren Funktionen auf* $[0,1]$ *mit* $d(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|dx$.

*(h)* $\mathcal{L}^1([0,1]) =$ *Menge der Lebesgue-integrierbaren Funktionen auf* $[0,1]$ *mit* $d(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|dx$.

Im Fall von $(b)$, $(b')$, $(c)$ folgt die Dreiecksungleichung für $p > 1$ aus der in Abschnitt 2.1 bewiesenen Minkowski-Ungleichung, im Fall $(f')$ analog dazu mit Integration statt Summation.
Die Beispiele $(a) - (f')$ sind metrische Räume, $(g)$ und $(h)$ lediglich halbmetrische Räume. Der zu $\mathcal{L}^1([0,1])$ gehörige separierte Raum wird mit $L^1([0,1])$ bezeichnet. Man bildet die Beispiele $(c) - (f')$ auch mit den entsprechenden reellen Folgen bzw. Funktionen.

## 1.2 Konvergenz in metrischen Räumen

**Definition 1.2.1.** *Eine Folge* $\{x_n\}$ *in einem halbmetrischen Raum* $(X,d)$ **konvergiert** *gegen* $a \in X$ *(kurz:* $x_n \to a$ *oder* $\lim x_n = a$*), wenn die reelle Zahlenfolge* $\{d(x_n,a)\}$ *gegen Null konvergiert. Man nennt* $a$ *dann Grenzwert (oder: Limes) der Folge* $\{x_n\}$. *Eine Folge in* $X$ *heißt* **konvergent**, *wenn es einen Punkt in* $X$ *gibt, gegen den sie konvergiert.*

**Bemerkung.** (a) Eine Folge in einem metrischen Raum hat höchstens einen Grenzwert. Denn gilt $x_1 \to a$ und $x_n \to b$, so folgt $0 \leq d(a,b) \leq d(a,x_n) + d(x_n,b) \to 0$, also $d(a,b) = 0$ und somit $a = b$.

(b) Für halbmetrische Räume ist diese Aussage falsch (siehe Übung 1.6.3)

**Definition 1.2.2.** *Eine Folge* $\{x_n\}$ *in* $(X,d)$ *heißt* **Cauchy-Folge**, *wenn für jedes* $\varepsilon > 0$ *ein* $n_0 \in \mathbb{N}$ *existiert mit* $d(x_n,x_m) < \varepsilon$ *für alle* $n,m > n_0$.

**Bemerkung.** (a) Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge.

(b) Die Umkehrung ist falsch: Als Gegenbeispiel betrachte man $X = \mathbb{Q}$ (rationale Zahlen) mit $d(x,y) = |x-y|$. Die Folge $\{(1+\frac{1}{n})^n\}$ ist eine Cauchy-Folge, konvergiert aber nicht in $\mathbb{Q}$).

**Definition 1.2.3.** *Ein metrischer (oder halbmetrischer) Raum heißt* **vollständig***, wenn jede Cauchy-Folge konvergiert.*

**Bemerkung.** (a) Von den in 1.1.2 genannten Beispielen, ausgenommen $(f)$, $(f')$ und $(g)$, sind alle Räume vollständig.

(b) Ein halbmetrischer Raum $(X,d)$ ist genau dann vollständig, wenn der zugehörige separierte Raum $(X^\sim, d^\sim)$ vollständig ist.

**Definition 1.2.4.** *Eine Abbildung $f : (X,d) \to (Y,d')$ heißt* **Isometrie** *(oder isometrische Abbildung), wenn*

$$d'(f(x), f(y)) = d(x,y)$$

*für alle $z, y \in X$ gilt.*

**Beispiel 1.2.5.** *Die kanonische Projektion $z \mapsto z^\sim$ eines halbmetrischen Raumes $(X,d)$ auf den zugehörigen separierten Raum $(X^\sim, d^\sim)$ ist eine Isometrie.*

**Bemerkung.** Eine Isometrie zwischen metrischen Räumen ist stets injektiv. Für halbmetrische Räume ist das falsch. Hinreichend für die Injektivität einer Isometrie ist, daß der Ausgangsraum metrisch ist.

# 1.3 Einige Sätze und ihre Anwendungen

## Satz über die Vervollständigung

Für den Beweis des folgenden Satzes wie auch sonst oft ist Folgendes nützlich.

**Bemerkung.** (a) Ist (X,d) ein halbmetrischer Raum und sind $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ Folgen in $X$ mit $d(a_n, b_n) \to 0$, so ist $\{a_n\}$ eine Cauchyfolge (bzw. konvergent) genau dann, wenn $\{b_n\}$ es ist. Gilt $a_n \to a$, so auch $b_n \to a$.

(b) (i) Sind $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ Cauchy-Folgen, so ist $\{d(a_n, b_n)\}$ eine (reelle) Cauchy-Folge und somit in $\mathbb{R}$ konvergent.

(ii) Gilt $a_n \to a$ und $b_n \to b$ so folgt $d(a_n, b_n) \to d(a,b)$.

Beides folgt aus

(c) Für $a, b, x, y \in X$ gilt $|d(a,b) - d(x,y)| \leq d(a,x) + d(b,y)$ (Übung 1.6.2).

**Satz 1.3.1** (Satz über die Vervollständigung)**.** *Ist $(X,d)$ ein metrischer Raum, so gibt es einen vollständigen metrischen Raum $(\hat{X}, \hat{d})$ und eine Isometrie $i : X \to \hat{X}$, so daß es zu jedem $\hat{x} \in \hat{X}$ eine Folge $\{x_n\}$ in $X$ mit $i(x_n) \to \hat{x}$ gibt (d.h. daß $i(X)$ dicht in $\hat{X}$ ist). Der Raum $(\hat{X}, \hat{d})$ heißt* **Vervollständigung** *von $X$ und ist bis auf eine bijektive Isometrie eindeutig bestimmt. Oft fasst man $X$ vermöge der Isometrie $i$ als Teilmenge von $\hat{X}$ auf.*

*Beweis.* (a) Eindeutigkeit: Wenn $(\hat{X}, \hat{d})$ mit der Isometrie $i$ sowie $(\overline{X}, \overline{d})$ mit der Isometrie $j$ die oben erwähnte Eigenschaft besitzen, so ist $j \circ (i^{-1})$ eine Isometrie von $i(X)$ auf $j(X)$. Ist $\hat{x} \in \hat{X}$ und $\{x_n\}$ eine Folge in $X$ mit $i(x_n) \to \hat{x}$, so setzen wir $k(\hat{x}) = \lim j(x_n)$. Die Abbildung $k$ ist wohldefiniert (d.h. $k(\hat{x})$ hängt nicht von der Wahl von $\{x_n)$ ab) und wegen 1.3.2 (b) (ii) isometrisch von $\hat{X}$ auf $\overline{X}$. übrigens setzt $k$ natürlich die Isometrie $j \circ (i^{-1})$ fort.

(b) Existenz der Vervollständigung $(\hat{X}, \hat{d})$:

(i) Sei $Z$ die Menge aller Cauchyfolgen in $X$ mit der Halbmetrik
$d_Z(\{a_n\}, \{b_n\}) = \lim_{n\to\infty} d(a_n, b_n)$. (Der Limes existiert nach Bemerkung (b) oben). Für $x \in X$ sei $j(x)$ die konstante Folge $(x, x, x, ...) \in Z$. Offenbar ist $j$ eine Isometrie von $X$ nach $Z$. Zu $\{a_n\} \in Z$ und $\varepsilon > 0$ gibt es ein $x \in X$ mit $d_Z(\{a_n\}, j(x)) \leq \varepsilon$. (Ist $d(a_n, a_m) < \varepsilon\ \forall n, m \geq n_0$, so leistet $x = a_{n_0}$ das Gewünschte). Somit ist $j(X)$ dicht in $Z$. Nun zur Vollständigkeit von $Z$: Sei $\{A_m\}$ eine Cauchyfolge in $Z$ und seien $x_m \in X$ so gewählt, daß $d_Z(A_m, j(x_m)) \leq \frac{1}{m}$ gilt. Nach (a) der Bemerkung oben ist $\{j(x_m)\}$ Cauchy-Folge in $Z$, also $\{x_m\}$ Cauchy in $X$. Sei $A$ diese Cauchyfolge. Es gilt $d_Z(\{x_n\}, j(x_m)) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, x_m) \to 0$ für $m \to \infty$, d.h. $j(x_m) \to A$ in $Z$. Also $d_Z(A_m, A) \leq d_Z(A_m, j(x_m)) + d_Z(j(x_m), A) \to 0$, d.h. $Z$ ist vollständig.

(ii) Sei $Z^\sim, d_Z^\sim)$ der zu $(Z, d_Z)$ dazugehörige separierte Raum und $p$ die kanonische Projektion $z \to z^\sim$ von $Z$ auf $Z^\sim$- Dann ist $(Z^\sim, d_Z^\sim)$ ein vollständiger metrischer Raum und $i = p \circ j$ eine Isometrie von $X$ auf einen dichten Teil von $Z^\sim$.

□

**Bemerkung.**

Für halbmetrische Räume $(X, d)$ gilt eine schwächere Fassung des Vervollständigungssatzes. Der Beweis (b) oben (ohne (ii)) liefert, daß $(Z, d_Z)$ ein vollständiger halbmetrischer Raum und $j : X \to Z$ eine injektive Isometrie auf einen dichten Teil von $Z$ ist. Die Eindeutigkeit dieser Vervollständigung bis auf eine bijektive Isometrie geht allerdings verloren. An Beispielen sieht man, daß $Z$ unnötig groß sein kann. Ist z.B. $X$ ein zweipunktiger Raum mit der Nullmetrik, so ist das oben konstruierte $Z$ überabzählbar, obwohl $X$ selbst schon vollständig ist! Der metrische Raum $Z^\sim$ besteht in diesem Fall aber nur aus einem Punkt.

## Banachscher Fixpunktsatz

**Satz 1.3.2** (Banachscher Fixpunktsatz.)**.** *Sei $(X, d)$ ein vollständiger metrischer Raum und $T : X \to X$ eine Kontraktion, d.h. es gebe ein $q \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq q < 1$ und $d(Tx, Ty) \leq q \cdot d(x, y)$. Dann besitzt $T$ genau einen Fixpunkt $a = Ta$ in $X$.*

*Beweis.* Sei $x \in X$ und $x_n = T^n x$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, Man zeigt zunächst, daß $\{x_n\}$ eine Cauchy-Folge ist. Hieraus folgt leicht die Behauptung.

(i) Für alle $n \geq m$ gilt: $d(T^n x, T^m x) \leq q^m \cdot d(T^{n-m} x, x)$

(ii) Es gilt:

$d(T^n x.x) \leq \sum_{j=1}^n d(T^j x, T^{j-1}x) \overset{\text{nach(i)}}{\leq} \sum_{j=1}^n q^{j-1} d(Tx, x) = \frac{1-q^n}{1-q} \cdot d(Tx, x)$

(iii) Nach (i) und (ii) gilt für alle $n \geq m$

$$d(T^n x, T^m x) \leq q^m \cdot \frac{1 - q^{n-m}}{1-q} \cdot d(Tx, x),$$

also ist $\{T^n x\}$ eine Cauchy-Folge.

(iv) Da $X$ vollständig ist, gibt es ein $a \in X$ mit $T^n x \to a$. Da $T$ eine Kontraktion ist, gilt auch $T^{n+1}x \to Ta$, und somit $a = \lim T^n x = \lim T^{n+1} x = Ta$. Gilt $Tb = b$ für ein $b \in X$, so folgt $d(a, b) = d(Ta, Tb) \leq q \cdot d(a, b)$, also $d(a, b) = 0$, d.h. $a = b$. □

**Bemerkung** Da wir $T^n x \to a$ gezeigt haben, folgt aus (iii) des Beweises für $n \to \infty$ eine Abschätzung der Konvergenzgeschwindigkeit:

$$d(a, T^m x) \leq \frac{q^m}{1-q} d(Tx, x).$$

**Eine Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes**

**Satz 1.3.3** (Satz von Picard-Lindelöf)**.** *Ist $A \subset \mathbb{R}^2$ das Rechteck $\{(\xi, \eta) | a < \xi < b, c < \eta < d\}$ und $F : A \to \mathbb{R}$ stetig und in der zweiten Variablen Lipschitz-beschränkt, d.h. gilt $|F(\xi, \eta_1) - F(\xi, \eta_2)| \leq C \cdot |\eta_1 - \eta_2|$, so ist für jeden Punkt $(x_0, y_0) \in A$ das Anfangswertproblem $y' = F(x, y), y(x_0) = y_0$ lokal eindeutig lösbar, d .h. es gibt ein Intervall $I = [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ und eine auf $I$ definierte differenzierbare Funktion $f$ mit $f(x_0) = y_0$ und $f'(x) = F(x, f(x))$ für alle $x \in I$, und ist $g$ eine Funktion auf $I$ mit denselben Eigenschaften, so gilt $f(x) = g(x)$ für alle $x \in I$.*

*Beweis.* Sei $(x_0, y_0) \in A$. Ist $y$ eine Lösung des Anfangswertproblemss $y(x_0) = y_0$, $y' = F(x, y)$ auf einem Intervall $I$ mit $x_0 \in I$, so ist $x \mapsto F(x, y(x))$ als Zusammensetzung stetiger Funktionen stetig auf $I$, und durch Integration erhalten wir $y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^x y'(t)dt = \int_{x_0}^x F(t, y(t))dt$ für $x \in I$, d.h. $y$ ist eine (stetige) Lösung der Integralgleichung $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x F(t, y(t))dt$ auf $I$. Ist umgekehrt $y$ eine stetige Lösung dieser Integralgleichung, so folgt $y(x_0) = y_0$ und durch Differentiation $y'(x) = F(x, y(x))$ für $x \in I$, d.h. $y$ ist eine Lösung des oben genannten Anfangswertproblems auf $I$. Es genügt also, die eindeutige Lösbarkeit der Integralgleichung zu zeigen. Für $\varepsilon, h > 0$ mit $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \times [y_0 - h, y_0 + h] \subset A$ betrachten wir den Raum $X = \{f \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \Big| |f - y_0| \leq h\}$, der bezüglich der Metrik $d_\infty$ vollständig ist, denn jede Cauchyfolge $\{f_n\}$ in $X$ konvergiert in $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$, und die Ungleichung $|f_n - y_0| \leq h$ bleibt im Limes erhalten, der Grenzwert von $\{f_n\}$ liegt also in $X$. Für $f \in X$ sei $Tf$ definiert durch $Tf(x) = y_0 + \int_{x_0}^x F(t, f(t))dt$ für $x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$. Ist $M$ das Maximum von $|F|$ auf $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \times [y_0 - h, y_0 + h]$ und $\varepsilon M \leq h$, so gilt

$|Tf - y_0| \leq \varepsilon M \leq h$, d.h. $T$ bildet $X$ in sich ab. Für $f, g \in X$ gilt $d_\infty(Tf, Tg) = \sup_{|x-x_0|\leq\varepsilon} |\int_{x_0}^x (F(t, f(t)) - F(t, g(t)))dt| \leq \sup_{|x-x_0|\leq\varepsilon} \int_{x_0}^x C|f(t) - g(t)|dt \leq \varepsilon C d_\infty(f, g)$. Wenn wir $\varepsilon < \min(\frac{1}{C}, \frac{h}{M})$ wählen, so ist $T$ also eine Kontraktion, die $X$ in sich abbildet, und nach dem Banachschen Fixpunktsatz gibt es genau ein $g \in X$ mit $Tg = g$. Die oben genannte Integralgleichung (und damit auch das ursprüngliche Anfangswertproblem) hat also auf $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ die eindeutig bestimmte Lösung $g$. $\square$

**Bemerkung.** Der soeben bewiesene Satz handelt von reellen Funktionen, gilt aber entsprechend auch für komplexwertige oder allgemeine $\mathbb{R}^n$-wertige Funktionen. Für $A$ nimmt man dann z.B. ein $n+1$-dimensionales Intervall $(a, b) \times (a_1, b_1) \times ... \times (a_n, b_n)$, für $F$ eine stetige Abbildung von $A$ nach $\mathbb{R}^n$. Damit wird $y$ eine $\mathbb{R}^n$-wertige Funktion. Statt des Betrags auf $\mathbb{R}$ nimmt man auf $\mathbb{R}^n$ eine Norm (siehe Kapitel 2). Der Beweis des Satzes bleibt dann fast unverändert gültig.

## Durch eine Metrik induzierte Topologie

**Definition 1.3.4.**
*(a) Ist $(X, d)$ ein halbmetrischer Raum, $x \in X$ und $\varepsilon > 0$, so heißt die Menge $K_\varepsilon(x) := \{y \in X |\ d(x, y) < \varepsilon\}$ die* **(offene) Kugel** *um $x$ mit Radius $\varepsilon$, oder einfach die $\varepsilon$-Kugel um $x$.*
*(b) Eine Teilmenge $O$ von $(X, d)$, heißt* **offen**, *wenn es zu jedem $x \in O$ ein $\varepsilon > 0$ mit $K_\varepsilon(x) \subset O$ gibt.*

**Übung.** Die Mengen $K_\varepsilon(x)$ sind offen (was die Bezeichnung "offene Kugel" rechtfertigt).

**Bemerkung.**
(a) (i) Ø und $X$ sind offen.
(ii) Endliche Durchschnitte offener Mengen sind offen.
(iii) Beliebige Vereinigungen offener Mengen sind offen.
Die offenen Mengen bilden also eine Topologie, die Bezeichnung „offen" ist somit gerechtfertigt.
(b) Komplemente offener Mengen heißen **abgeschlossen**. Aus (a) (i) - (iii) ergibt sich durch Komplementbildung:
(i) Ø und $X$ sind abgeschlossen
(ii) Endliche Vereinigungen abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.
(iii) Beliebige Durchschnitte abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.

**Übung.** Die **(abgeschlossene) Kugel** $K'_\varepsilon(x) := \{y \in X | d(x, y) \leq \varepsilon\}$ ist abgeschlossen.

**Proposition 1.3.5.** *(Charakterisierung abgeschlossener Mengen durch Folgen). Sei $(X, d)$ ein halbmetrischer Raum. Eine Teilmenge $M$ von $X$ ist genau dann abgeschlossen, wenn jeder Grenzwert einer Folge in $M$ ebenfalls in $M$ liegt.*

*Beweis.* Um einen Widerspruchsbeweis zu vermeiden, zeigen wir die äquivalenz der Negationen der beiden betrachteten Aussagen.

(i) Sei $M$ nicht abgeschlossen, also $X \setminus M$ nicht offen. Dann gibt es ein $x \in X \setminus M$ mit $K_\varepsilon(x) \cap M \neq \varnothing \ \forall \varepsilon > 0$. Für $n = 1, 2, ...$ wähle man $x_n \in K_{1/n}(x) \cap M$. Es gilt $x_n \to x$, also ist wegen $x \in X \setminus M$ die Folgenbedingung für $M$ nicht erfüllt.

(ii) Sei die Folgenbedingung für $M$ nicht erfüllt, gebe es also $x_n \in M$ mit $x_n \to x \in X \setminus M$. Wegen $d(x_n, x) \to 0$ gilt $K_\varepsilon \cap M \neq \varnothing \ \forall \varepsilon > 0$. Somit ist $X \setminus M$ nicht offen, also $M$ nicht abgeschlossen. □

**Proposition 1.3.6.** *(Zusammenhang zwischen Vollständigkeit und Abgeschlossenheit von Teilmengen) (i) Ist $(X, d)$ ein metrischer Raum und $A \subset X$ als Unterraum $(A, d|_{A \times A})$ vollständig, so ist $A$ abgeschlossen in $X$.*

*(ii) Ist $(X, d)$ ein vollständiger halbmetrischer Raum und $A \subset X$ abgeschlossen, so ist $(A, d|_{A \times A})$ vollständig.*

*Beweis.* (i) Sei unter den gegebenen Voraussetzungen $\{x_n\}$ eine Folge in $A$ mit $x_n \to x \in X$. Dann ist $\{x_n\}$ eine Cauchyfolge und wegen der Vollständigkeit von $A$, gibt es ein $y \in A$ mit $x_n \to y$. Da $d$ eine Metrik ist, folgt $x = y \in A$, also ist $A$ nach 1.3.5 abgeschlossen.

(ii) Unter den gegebenen Voraussetzungen sei $\{x_n\}$ eine Cauchyfolge in $A$. Da $X$ vollständig ist, gibt es $x \in X$ mit $x_n \to x$. Da $A$ abgeschlossen ist, folgt aus 1.3.5 $x \in A$. Somit ist $(A, d|_{A \times A})$ vollständig. □

**Folgerung.** Ist $(X, d)$ ein vollständiger metrischer Raum, so ist eine Teilmenge von $X$ genau dann abgeschlossen, wenn sie als Unterraum vollständig ist.

## Satz von Baire

Es sei zunächst an einige Definitionen der Topologie erinnert:

**Definition 1.3.7.** *Sei $X$ ein topologischer Raum und $M$ eine Teilmenge von $X$. Der* **Abschluss** *von $M$ ist die kleinste abeschlossene Menge, die $M$ enthält, und wird mit $\overline{M}$ bezeichnet. Das* **Innere** *(oder der* **offene Kern***) von $M$ ist die größte offene Menge, die in $M$ enthalten ist, und wird mit $\mathring{M}$ bezeichnet. $M$ heißt nirgends dicht, wenn der Abschluß von $M$ leeres Inneres hat, also $\mathring{\overline{M}} = \varnothing$ gilt. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt* **von 1. Kategorie***, wenn sie eine abzählbare Vereinigung nirgends dichter Teilmengen von $X$ ist. Im anderen Fall heißt $A$* **von 2. Kategorie***.*

**Satz 1.3.8** (Kategoriensatz von Baire)**.** *Jede nichtleere offene Teilmenge eines vollständigen halbmetrischen Raumes $(X, d)$ ist von 2. Kategorie.*

*Beweis.* Sei $O$ eine nichtleere offene Teilmenge von $X$, und $\{N_n\}$ eine Folge nirgends dichter abgeschlossener Teilmengen von $X$. Es gilt $O \not\subset N_1$ (da $N_1$ nirgends dicht ist). Also gibt es $x_1 \in O \setminus N_1$ und (da $N_1$ abgeschlossen ist) $\varepsilon_1 < 1$ mit $K'_{\varepsilon_1}(x_1) \subset O \setminus N_1$. Da $K_{\varepsilon_1}(x_1) \not\subset N_2$, gibt es $x_2 \in K_{\varepsilon_1}(x_1) \setminus N_2$ und $\varepsilon_2 < \frac{1}{2}$ mit $K'_{\varepsilon_2}(x_2) \subset K_{\varepsilon_1}(x_1) \setminus N_2$. Wir fahren per Induktion fort. Sind

$x_1, ..., x_n$ und $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n$ schon gewählt, so gilt $K_{\varepsilon_n}(x_n) \not\subset N_{n+1}$, es gibt also $x_{n+1} \in K_{\varepsilon_n}(x_n) \setminus N_{n+1}$ und $\varepsilon_{n+1} < \frac{1}{n+1}$ mit $K'_{\varepsilon_{n+1}}(x_{n+1}) \subset K_{\varepsilon_n}(x_n) \setminus N_{n+1}$. Wir erhalten so eine Folge $\{x_k\}$ mit $d(x_m, x_k) < \frac{1}{k}$ für $m \geq k$, also eine Cauchy-Folge. Da $X$ vollständig ist, gibt es ein $x \in X$ mit $x_n \to x$. Da $x_k \in K'_{\varepsilon_n}(x_n)$ für alle $k > n$ und da $K'_{\varepsilon_n}(x_n)$ abgeschlossen ist, gilt $x \in K'_{\varepsilon_n}(x_n)$ für jedes $n$, also $x \in \cap_n K'_{\varepsilon_n} \subset O \setminus (\cup_n N_n)$. Das zeigt, daß $O$ nicht von 1. Kategorie ist. $\square$

**Bemerkung.** Insbesondere ist jeder nichtleere vollständige halbmetrische Raum von 2. Kategorie.

### Eine Anwendung des Satzes von Baire

**Satz 1.3.9.** *Die Menge $M$ der Funktionen $f \in \mathcal{C}([0,1])$, die in irgendeinem Punkt eine rechtsseitige Ableitung haben, ist von 1. Kategorie in $\mathcal{C}([0,1])$, also eine echte Teilmenge von $\mathcal{C}([0,1])$. Folglich gibt es stetige Funktionen auf $[0,1]$, die nirgends differenzierbar sind.*

Dieser Satz ist eine direkte Konsequenz des folgenden stärkeren Resultats:

**Satz 1.3.10.** *Die Menge $M$ der $f \in \mathcal{C}[0,1]$, die in irgendeinem Punkt $t \in [0,1)$ eine rechtsseitige Lipschitz-Bedingung erfüllen (d.h. zu $f$ gibt es $L$ und $d > 0$ mit $|f(t+h) - f(t)| \leq L \cdot h \;\forall h \in [0,d]$), ist von 1. Kategorie, also eine echte Teilmenge von $\mathcal{C}[0,1]$. Es gibt also ein (tatsächlich sogar unendlich viele) $f \in \mathcal{C}[0,1]$, das in keinem $t \in [0,1)$ eine rechtsseitige Lipschitz Bedingung erfüllt, insbesondere also in keinem Punkt rechtsseitig differenzierbar ist.*

*Beweis.* Für $n = 1, 2, ...$ sei $N_n = \{f \in \mathcal{C}[0,1] |\; \exists t \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$ mit $|f(t+h) - f(t)| \leq nh \;\forall h \in [0, \frac{1}{n}]\}$. Erfüllt $f \in \mathcal{C}[0,1]$ eine rechtsseitige Lipschitz-Bedingung wie oben, so gilt $f \in N_n$ für genügend großes $n$, also $M \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n$.

(a) $N_n$ ist abgeschlossen: Seien $f_k \in N_n$ mit $f_k \to f \in \mathcal{C}[a,b]$. Es gibt $t_k \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$ mit $|f_k(t_k + h) - f_k(t_k| \leq nh$ für $h \in [0, \frac{1}{n}]$. Sei $(t_{k'})$ eine konvergente Teilfolge und $t = \lim_{k'} t_{k'}$. Es gilt $t \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$ und $|f_{k'}(t_{k'}) - f(t)| \leq |f_{k'}(t_{k'}) - f(t_{k'})| + |f(t_{k'}) - f(t)| \leq d_\infty(f_{k'}, f) + |f(t_{k'}) - f(t)| \to 0$ sowie für $h \in [0, \frac{1}{n}]$ analog $|f_{k'}(t_{k'} + h) - f(t+h)| \to 0$, also $|f(t+h) - f(t)| = \lim_{k'} |f_{k'}(t_{k'} + h) - f_{k'}(t_{k'})| \leq nh$ für $0 \leq h \leq \frac{1}{n}$. Somit ist $f \in N_n$ und damit $N_n$ abgeschlossen.

(b) Sei $f \in N_n$ und $\varepsilon > 0$. Wir zeigen $K_\varepsilon(f) \not\subset N_n$, also $\overset{\circ}{N}_n = \varnothing$ d.h. $N_n$ hat keine inneren Punkte. Es gilt $f = f_1 + if_2$ mit reellwertigen $f_i \in \mathcal{C}[a,b]$. Wir betrachten $f_1$. Da $f_1$ auf $[0,1]$ gleichmäßig stetig ist , gibt es ein $\delta > 0$ mit $|f_1(r) - f_1(s)| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $r, s \in [0,1]$ mit $|r - s| \leq \delta$. Indem wir $\delta$ (falls nötig) verkleinern, können wir annehmen, daß $\frac{1}{\delta} \in \mathbb{N}$ gilt. Dann ist $[0,1] = \bigcup_{k=0}^{\frac{1}{\delta}-1} [k\delta, (k+1)\delta]$ und auf $[k\delta, (k+1)\delta]$ gilt $f_1(k\delta) - \varepsilon/2 < f_1 < f_1(k\delta) + \varepsilon/2$. Man konstruiert nun (dies sei dem Leser überlassen) eine „Zackenfunktion“ $z$ auf $[0,1]$, eine stückweise lineare (stetige) Funktion, die wie $f_1$ auf jedem Intervall $[k\delta, (k+1)\delta]$ ebenfalls $f_1(k\delta) - \frac{\varepsilon}{2} < z < f_1(k\delta) + \frac{\varepsilon}{2}$ erfüllt und deren geradlinige Segmente einen Anstieg $> n$ oder $< -n$ haben. Nun gilt $d_\infty(f, z + if_2) = d_\infty(f_1 + if_2, z + if_2) = d_\infty(f_1, z) < \varepsilon$, also $z + if_2 \in K_\varepsilon(f)$. Für beliebiges

$t \in [0,1)$ und genügend kleines $h > 0$ ergibt sich $|(z+if_2)(t+h)-(z+if_2)(t)| \geq |z(t+h)-z(t)| > nh$. Also gilt $z + if_2 \notin N_n$ und somit $K_\varepsilon(f) \not\subset N_n$. Somit ist $N_n$ nirgends dicht und $M \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{N}$ von 1. Kategorie. □

## 1.4 Kompaktheit

Da (halb-)metrische Räume insbesondere topologische Räume sind, hat man den Begriff der Kompaktheit. Eine Teilmenge $K$ von $X$ heißt **kompakt**, wenn jede Überdeckung von $K$ durch offene Teilmengen von $X$ eine endliche Teilüberdeckung von $K$ besitzt. Es gilt folgendes Kriterium:

**Satz 1.4.1.** *Eine Teilmenge $K$ eines halbmetrischen Raumes $(X, d)$ ist genau dann kompakt, wenn jede Folge in $K$ eine in $K$ konvergente Teilfolge enthält. (Für letztere Eigenschaft sagt man: $K$ ist "folgenkompakt".)*

*Beweis.* "$\Rightarrow$" Sei $K$ kompakt und $\{x_n\}$ eine Folge in $K$. Es gibt einen Häufungswert $x \in K$ (d.h. für jedes $\varepsilon > 0$ gilt $x_n \in K_\varepsilon(x)$ für unendlich viele Indizes $n$), denn sonst gäbe es zu jedem $y \in K$ ein $\varepsilon_y > 0$ mit $x_n \in K_{\varepsilon_y}(y)$ für höchstens endlich viele $n$, und die offene Überdeckung $\{K_{\varepsilon_y}(y)\}$ von $K$ könnte keine endliche Teilüberdeckung haben, da $\mathbb{N}$ unendlich ist. Per Induktion wählt man nun eine Teilfolge $\{x_{n_k}\}$ mit $d(x_{n_k}, x) < \frac{1}{k}$ aus. Offensichtlich gilt $x_{n_k} \to x$ für $k \to \infty$

"$\Leftarrow$" Sei $\{O\}_{O\in\Omega}$ eine offene Überdeckung von $K$. Sei $x_1 \in K$ und $r(x_1) = \sup\{\varepsilon > 0 \,|\, \exists\, O \in \Omega \text{ mit } K_\varepsilon(x_1) \subset O\}$ Es gibt ein $O_1 \in \Omega$ mit $K_{r(x_1)/2}(x_1) \subset O_1$. Ist $x_2 \in K \setminus O_1$, so gibt es ein $O_2 \in \Omega$ mit $K_{r(x_2)/2}(x_2) \subset O_2$, und wenn $\Omega$ keine endliche Teilüberdeckung zuläßt, erhalten wir so per Induktion zwei Folgen $\{x_n\}$ und $\{O_n\}$ mit $x_n \notin \bigcup_{k<n} O_k$ und $K_{r(x_n)/2}(x_n) \subset O_n$. Es gilt $d(x_n, x_m) \geq \frac{1}{2} r(x_n)$ für $m > n$. Gibt es nun eine etwa gegen $x \in K$ konvergente Teilfolge $\{x_{n'}\}$, so folgt $r(x_{n'}) \to 0$. Das kann aber nicht sein, denn für $z \in K_{r(x)/2}(x)$ gilt $r(z) \geq r(x)/2$. Also lässt $\Omega$ eine endliche Teilüberdeckung zu, was die Kompaktheit von $K$ zeigt. □

**Bemerkung** In allgemeinen topologischen Räumen gilt weder die Implikation "kompakt $\Rightarrow$ folgenkompakt"noch "folgenkompakt $\Rightarrow$ kompakt".

**Definition 1.4.2.** *Eine Teilmenge $M$ eines halbmetrischen Raums $X$ heißt* **beschränkt***, wenn es eine Kugel $K_r(a)$ in $X$ gibt, die $M$ enthält.*

**Proposition 1.4.3.** *(a) Jede kompakte Menge eines halbmetrischen Raums ist beschränkt.*

*(b) Jede kompakte Menge eines metrischen Raums ist abgeschlossen.*

*Beweis.* (a) Ist $K$ kompakt und überdeckt man $K$ mit den offenen Kugeln $K_1(x)$, $x \in X$, so genügen schon endlich viele davon zur Überdeckung, d.h. es gilt $K \subset \bigcup_{i=1}^n K_1(x_i)$ Ist $p \in X$ ein beliebiger Punkt und $r = \max_{1\leq i\leq n} d(p, x_i) + 1$, so gilt $K_1(x_i) \subset K_r(p)$ für jedes $i$, also $K \subset K_r(p)$, d.h. $K$ ist beschränkt.

(b) Sei $K \subset X$ kompakt und $y \in X \setminus K$. Für $x \in K$ gilt $K_{d(x,y)/2}(x) \cap K_{d(x,y)/2}(y) = \varnothing$. Die $K_{d(x,y)/2}(x)$, $x \in K$, bilden eine offene Überdeckung von $K$, also genügen schon endlich viele $K_{d(x_1,y)/2}(x_1), ..., K_{d(x_n,y)/2}(x_n)$ zur Überdeckung. Ist $r_y = \min_{1 \leq i \leq n} d(x_i, y)/2$, so trifft $K_{r_y}(y)$ kein $K_{d(x_i,y)/2}(x_i)$, also auch $K$ nicht, d.h. $K_{r_y}(y) \subset X \setminus K$. Da dies für jedes $y \in X \setminus K$ gilt, ist $X \setminus K$ offen, also $K$ abgeschlossen. □

Wie aus dem Beweis ersichtlich, gilt (b) allgemeiner für alle Hausdorffschen (oder: separierten) Räume, d.h. topologische Räume, die das Hausdorffsche Trennungsaxiom $T_2$ erfüllen: zu Punkten $x \neq y$ gibt es Umgebungen $U_x, U_y$ von $x$ bzw. $y$ mit $U_x \cap U_y = \varnothing$. (Es sei an den Umgebungsbegriff erinnert. $U$ heißt Umgebung von $x$, wenn es eine offene Menge $O$ mit $x \in O \subset U$ gibt.)

**Bemerkung.** Im $(R^n, d_p)$ sind die kompakten Mengen genau die beschränkten und abgeschlossenen Mengen (Heine - Borel). Für beliebige metrische Räume ist das nicht mehr richtig. Um die Sache zu retten, benötigt man einen verschärften Beschränktheitsbegriff:

**Definition 1.4.4.** *Eine Teilmenge $M$ von $(X, d)$ heißt* **total beschränkt** *(oder* **präkompakt***), wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ endlich viele Punkte $x_1, \ldots, x_n \in X$ mit $M \subset \bigcup_1^n K_\varepsilon(x_i)$ gibt. (Man kann die $x_i$ in $M$ wählen, denn ausgehend von einer Überdeckung mit $\varepsilon/2$-Kugeln kann man eine Überdeckung mit $\varepsilon$-Kugeln gewinnen, deren Mittelpunkte in $M$ liegen.)*

**Bemerkung.** Ist $M \subset X$ total beschränkt, so auch $\overline{M}$. Wird nämlich $M$ von den Kugeln $K_\varepsilon(x_1), ..., K_\varepsilon(x_n)$ überdeckt, so gilt auch $M \subset \cup_{i=1}^n K'_\varepsilon(x_i) \subset \cup_{i=1}^n K_{2\varepsilon}(x_i)$. Die mittlere Menge ist abgeschlossen, enthält also auch $\overline{M}$. Somit gilt $\overline{M} \subset \cup_{i=1}^n K_{2\varepsilon}(x_i)$

**Definition 1.4.5.** *Eine Teilmenge eines halbmetrischen Raumes heißt* **relativ kompakt***, wenn ihr Abschluss kompakt ist.*

**Proposition 1.4.6.** *(a) Jede relativ kompakte Teilmenge eines halbmetrischen Raumes ist total beschränkt*

*(b) Ist $(X, d)$ vollständig, so gilt die Umkehrung von (a): jede total beschränkte Teilmenge ist relativ kompakt.*

*Beweis.* (a) ist klar.

(b) Sei $A$ (und somit auch $\overline{A}$) total beschränkt und sei $\{x_n\}$ eine Folge in $\overline{A}$. Da $\overline{A}$ von endlich vielen Kugeln mit Radius 1 überdeckt wird, muss eine davon, wir nennen sie $K_1$, unendlich viele Folgenglieder $x_n$ enthalten. Da $\overline{A} \cap K_1 \subset \overline{A}$ sich mit endlich vielen Kugeln mit Radius $\frac{1}{2}$ überdecken lässt, gibt es eine solche Kugel, wir nennen sie $K_2$, so daß $(\overline{A} \cap K_1) \cap K_2$ unendlich viele $x_n$ enthält. Per Induktion erhalten wir Kugeln $K_i$, $i \in \mathbb{N}$, mit Radien $\frac{1}{i}$, so daß $\overline{A} \cap K_1 \cap ... \cap K_i =: A_i$ unendlich viele $x_n$ enthält. Wählt man nun $x_{n_i} \in A_i$ für $i \in \mathbb{N}$ mit $n_i > n_{i-1}$, so gilt für $i \geq k$ $d(x_{n_i}, x_{n_k}) \leq \frac{2}{k}$, d.h. $\{x_{n_i}\}$ ist eine Cauchyfolge. Sie konvergiert, da $X$ vollständig ist, der Grenzwert liegt in $\overline{A}$. Somit ist $\overline{A}$ nach Satz 1.4.1 kompakt, also $A$ relativ kompakt. □

**Folgerung 1.4.7.** *Eine Teilmenge eines vollständigen halbmetrischen Raumes ist genau dann relativ kompakt, wenn sie total beschränkt ist.*

**Satz 1.4.8.** *(Charakterisierung der Kompaktheit á la Heine-Borel). In einem vollständigen metrischen Raum ist eine Teilmenge genau dann kompakt, wenn sie total beschränkt und abgeschlossen ist.*

*Beweis.* Man füge auf beiden Seiten der äquivalenz der Folgerung die Aussage "und abgeschlossen" hinzu und benutze, daß "kompakt und abgeschlossen" im metrischen Raum dasselbe ist wie "kompakt". $\square$

## 1.5 Stetigkeit

**Definition 1.5.1.** *Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen halbmetrischen Räumen $X$ und $Y$ heißt* **stetig in $\mathbf{x}_0 \in X$**, *wenn für jede Folge $\{x_n\}$ in $X$ mit $x_n \to x_0$ gilt: $f(x_n) \to f(x_0)$. Man nennt $f$* **stetig**, *wenn es in jedem Punkt von $X$ stetig ist.*

**Bemerkung 1.5.2.** *(a) Eine Abbildung) $f : X \to Y$ ist genau dann in $x_0 \in X$ stetig, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt mit $d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ für alle $x \in X$ mit $d_X(x, x_0) < \delta$.*

*(b) $f$ ist stetig genau dann, wenn Urbilder offener Mengen offen sind, d.h. wenn $f$ im Sinne der Topologie stetig ist. (Übung 1.6.29) [äquivalent: wenn Urbilder abgeschlossener Mengen abgeschlossen sind.]*

*In diesem Zusammenhang sei an drei rein topologische Tatsachen erinnert:*

*(c) Das stetige Bild einer kompakten Menge $K$ ist kompakt. (Denn ist $f$ stetig und ist $f(K) \subset \cup_{O\in\Omega} O$ eine offene Überdeckung von $f(K)$, so ist $\cup_{O\in\Omega} f^{-1}(O) \supset K$ eine offene Überdeckung von $K$, also gibt es (da $K$ kompakt) endlich viele $O_1, \dots, O_n \in \Omega$ mit $K \subset \cup_{i=1}^n f^{-1}(O_i)$. Es folgt $f(K) \subset \cup_{i=1}^n f f^{-1}(O_i) \subset \cup_{i=1}^n O_i$. Also ist $f(K)$ kompakt.)*

*(d) Ist $K \neq \varnothing$ kompakt so nimmt jede stetige reellwertige Funktion $f$ auf $K$ ihr Maximum und Minimum an. (Denn $f(K)$ hat als nichtleere kompakt Teilmenge von $\mathbb{R}$ ein größtes und ein kleinstes Element).*

*(e) Seien $X, Y$ topologische Räume, $X$ kompakt, $Y$ Hausdorffsch, und $f : X \to Y$ bijektiv und stetig. Dann ist auch $f^{-1}$ stetig, also $f$ ein Homöomorphismus. (Denn das Urbild $(f^{-1})^{-1}A = f(A)$ einer abgeschlossenen Menge $A$ ist nach 1.6.26, (c) oben, und der Nachbemerkung zu Proposition 1.4.3 (b) abgeschlossen, also ist $f^{-1}$ stetig).*

**Definition 1.5.3.** *$f : X \to Y$ heißt* **gleichmäßig stetig**, *wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß aus $d_X(x, y) < \delta$ stets $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$ folgt.*

**Beispiele 1.5.4.** *(a) Jede Isometrie und jede Kontraktion ist gleichmäßig stetig.*

*(b) Seien $(X, d), (Y, d')$ halbmetrische Räume und $f : X \to Y$ stetig. Ist $X$ kompakt, so ist $f$ gleichmäßig stetig.*

*Beweis.* von (b). Seien $(X,d),(Y,d'),f$ wie vorausgesetzt und sei $\varepsilon > 0$. Für $x \in X$ gibt es ein $\delta_x > 0$ mit $d'(f(x), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $y \in K_{\delta_x}(x)$. Die Kugeln $K_{\delta_x/2}(x)$, $x \in X$, bilden eine offene Überdeckung von $X$. Da $X$ kompakt ist, gibt es endlich viele $x_1,...,x_n \in X$ mit $K \subset \bigcup_{i=1}^n K_{\delta_{x_i}/2}(x_i)$. Sei $\delta = \min_{1\le i\le n} \delta_{x_i}/2$. Sind $x,y \in X$ mit $d(x,y) < \delta$ so gibt es ein $i \in \{1,...,n\}$ mit $x \in K_{\delta_{x_i}/2}(x_i)$. Es folgt $d(y,x_i) \le d(y,x)+\delta_{x_i}/2 \le \delta_{x_i}$. Somit gilt $d'(f(y),f(x)) \le d'(f(y),f(x_i))+ d'(f(x_i),f(x)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Die Abbildung $f$ ist also gleichmäßig stetig. □

## 1.6 Übungen, Beispiele, Ergänzungen

**Übung 1.6.1.** *Sei $(X,d)$ ein halbmetrischer Raum und $x_1,...,x_n \in X$. Man zeige*

$$d(x_1,x_n) \le \sum_{i=1}^{n-1} d(x_i,x_{i+1}).$$

**Übung 1.6.2.** *Man zeige: Ist $(X,d)$ ein halbmetrischer Raum so gilt für alle $a,b,p,q \in X$*

$$|d(a,b) - d(p,q)| \le d(a,p) + d(b,q).$$

**Übung 1.6.3.** *Man zeige, daß eine Halbmetrik auf $X$ genau dann eine Metrik ist, wenn jede Folge in $X$ höchstens einen Grenzwert hat.*

**Übung 1.6.4.** *(a) Man zeige: Der Raum $C([0,1])$ der stetigen komplexen Funktionen auf dem Intervall $[0,1]$ wird mit $d(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|dx$ zu einem metrischen Raum.*

*(b) Ist dieser metrische Raum vollständig?*

**Übung 1.6.5.** *Sei $1 \le p < \infty$. Man zeige, daßder Raum $\ell^p$ mit der Metrik $d_p(\{x_n\},\{y_n\}) = (\sum_{n=1}^\infty |x_n - y_n|^p)^{\frac{1}{p}}$ vollständig ist.*

**Übung 1.6.6.** *Sei $\mathcal{P}[0,1]$ der Raum der reellen Polynome auf $[0,1]$ mit der Supremumsmetrik $d_\infty(f,g) = \sup_{t\in[0,1]} |f(t) - g(t)|$. Man zeige, daß die Vervollständigung von $\mathcal{P}[0,1]$ der Raum der stetigen reellen Funktionen auf $[0,1]$ ist.*

**Übung 1.6.7.** *Sei $(X,d)$ ein vollständiger metrischer Raum, $T$ eine Abbildung von $X$ in sich. Man zeige: Ist $T^k$ für ein $k \in \mathbb{N}$ eine Kontraktion, so hat $T$ genau einen Fixpunkt in $X$. Man zeige anhand eines Beispiels, daß der Banachsche Fixpunktsatz nicht für vollständige halbmetrische Räume gilt.*

**Übung 1.6.8.** *Leitet man den Satz von Picard-Lindelöf aus dem Banachschen Fixpunktsatz ab, so hängt das Definitionsintervall für die Lösung auch von der Lipschitzkonstante ab. Man kann das vermeiden, indem man eine andere (äquivalente) Metrik benutzt: $d(f,g) = \sup_{t\in I} |f(t) - g(t)|e^{-\lambda|t-t_0|}$, wobei man $\lambda$ geeignet zu wählen hat. Man zeige dies. Der Einfachheit halber sei $F$ stetig und beschränkt auf dem Definitionsbereich $(-1,1) \times \mathbb{R}$ und es werde das Anfangswertproblem $y' = F(x,y), y(0) = 0$ betrachtet.*

**Übung 1.6.9.** *Sei $k$ eine stetige reelle Funktion auf dem Dreieck $\{(s,t) \in \mathbb{R}^2 |\ 0 \le t \le s \le 1\}$ und sei $K : \mathcal{C}[0,1] \to C[0,1]$ definiert durch*

$$(Kx)(s) = \int_0^s k(s,t)x(t)dt$$

*für $x \in \mathcal{C}[0,1]$, $s \in [0,1]$. Man zeige: für $n \in \mathbb{N}$ gilt $|(K^n x)(s)| \le c_n s^n$ mit gewissen Konstanten $c_n$.*

**Übung 1.6.10.** *Sei $K$ wie in 1.6.9 und $g \in \mathcal{C}[0,1]$. Hat die Volterrasche Integralgleichung $x = Kx + g$ eine Lösung $x \in \mathcal{C}[0,1]$ und, falls ja, ist diese eindeutig?*

**Übung 1.6.11.** *Sei $(X,d)$ ein halbmetrischer Raum, $p \in X$ und $r > 0$. Man zeige, daß die abgeschlossene Kugel $K'_r(p) = \{x \in X |\ d(p,x) \le r\}$ nicht notwendig mit dem Abschluss $\overline{K_r(p)}$ der offenen Kugel $K_r(p)$ übereinstimmt. Welche Inklusion ist stets richtig?*

**Übung 1.6.12.** *Ist $A$ eine Teilmenge des halbmetrischen Raumes $(X,d)$, so nennt man $(A, d|_{A\times A})$ einen Unterraum von $(X,d)$. Wenn man vom Unterraum $A$ redet, meint man $(A, d|_{A\times A})$. Es soll gezeigt werden:*
*Eine Menge $O \subset A$ ist offen in $A$ genau dann, wenn es eine offene Menge $O' \subset X$ mit $O = O' \cap A$ gibt.*

**Übung 1.6.13.** *Man zeige: Ist $X = \mathbb{R}^2$, $d((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = |x_1-y_1|+|x_2-y_2|$ und $A = \{(x,0)|\ x \in \mathbb{R}\}$, so ist die Menge $\{(y,0)|\ 0 < y < 1\}$ offen in $A$, nicht aber offen in $X$.*

**Übung 1.6.14.** *(Charakterisierung des Abschlusses einer Menge) Sei $(X,d)$ ein halbmetrischer Raum und $M$ eine Teilmenge von $X$. Man zeige, daß der Abschluss $\overline{M}$ gleich der Menge aller Grenzwerte von Folgen in $M$ ist.*

**Bemerkung** *Insbesondere liefert 1.6.14 eine Charakterisierung dichter Teilmengen eines halbmetrischen Raumes $X$ durch Folgen: $M$ ist dicht in $X$ (d.h. $\overline{M} = X$) genau dann, wenn jedes $x \in X$ Limes einer Folge in $M$ ist.*

**Übung 1.6.15.** *Sei $X = \mathbb{R}^2$ mit der Euklidischen Metrik $d_2$. Man bestimme $\overline{A}$ für die Menge $A = \{(x, \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x})|x \in \mathbb{R}, x > 0\}$*

**Übung 1.6.16.** *Zwei Halbmetriken $d$ und $d'$ auf dem Raum $X$ heißen äquivalent, wenn es positive Konstanten $\alpha$ und $\beta$ gibt, so dass*

$$\alpha d(x,y) \le d'(x,y) \le \beta d(x,y) \qquad \text{für alle} \quad x,y \in X.$$

*Man zeige: (a) Die soeben definierte Relation ist tatsächlich eine äquivalenzrelation.*

*(b) Folgende Metriken im $\mathbb{R}^n$ sind äquivalent: $d_1(x,y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$, $d_2(x,y) = \Big(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2\Big)^{1/2}$, $d_\infty(x,y) = \max_{1\le i\le n} |x_i - y_i|$.*

**Übung 1.6.17.** *(a) Man zeige: Sind $d$ und $d'$ äquivalente Halbmetriken auf $X$, so sind sie auch 'topologisch äquivalent', d.h. sie erzeugen dieselbe Topologie, also dieselben offenen Mengen.*

*(b) Man gebe ein Beispiel, daß zwei Metriken, welche dieselbe Topologie erzeugen, nicht äquivalent zu sein brauchen.*

**Übung 1.6.18.** *Ist die Menge der irrationalen Zahlen in $\mathbb{R}$ von 1. oder 2. Kategorie?*

**Übung 1.6.19.** *Sei $X$ ein vollständiger halbmetrischer Raum und $M \subset X$ von 1. Kategorie.*

*(a) Man gebe ein Beispiel dafür, daß $X \setminus M$ eine Menge sein kann, die nur ein einziges Element enthält.*

*(b) Man zeige: Sind 1-punktige Teilmengen von $X$ nirgends dicht, so ist $X \setminus M$ überabzählbar.*

**Übung 1.6.20.** *Die Menge $M$ der in irgendeinem Punkt differenzierbaren stetigen Funktionen auf $[0,1]$ ist gemäß Satz 1.3.9 von 1. Kategorie in $(\mathcal{C}[0,1], d_\infty)$. Man zeige, daß die Einheitssphäre $S = \{f \in \mathcal{C}[0,1] | \; d_\infty(f,0) = 1\}$ überabzählbar viele Elemente enthält, die nirgends differenzierbar sind. Man beachte, daß die bloße Aussage $''\mathcal{C}[0,1] \setminus M$ ist überabzählbar$''$ sehr viel schwächer ist, denn hierfür genügt es, z.B. die skalaren Vielfachen einer einzigen nirgends differenzierbaren Funktion vorzuweisen.*

**Übung 1.6.21.** *Man zeige, daß in $(\mathbb{R}^n, d_2)$ jede beschränkte Menge total beschränkt ist, die beiden Beschränktheitsbegriffe im $\mathbb{R}^n$ also übereinstimmen. (Zwei Beweismöglichkeiten bieten sich an).*

**Übung 1.6.22.** *Man zeige: Eine Teilmenge $M$ eines metrischen Raumes $X$ ist genau dann total beschränkt, wenn $M$ als Teilmenge der Vervollständigung $\hat{X}$ relativ kompakt ist.(Letzteres erklärt die Bezeichnung "präkompakt").*

**Übung 1.6.23.** *Man zeige, daß eine Teilmenge $M$ eines halbmetrischen Raumes $X$ genau dann relativ kompakt ist, wenn jede Folge in $M$ eine konvergente Teilfolge besitzt. (Die Implikation $\Rightarrow$ folgt schon aus Satz 1.4.1.*

**Übung 1.6.24.** *Man gebe ein Beispiel einer nicht abgeschlossenen kompakten Menge in einen halbmetrischen Raum.*

**Übung 1.6.25.** *Man zeige: Ist $K$ eine kompakte Menge in einem halbmetrischen Raum, so ist auch $\overline{K}$ kompakt.*

**Übung 1.6.26.** *Man zeige, daß eine abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge kompakt ist.*

**Übung 1.6.27.** *(a) Man zeige, daß in metrischen Räumen Vereinigung und Durchschnitt zweier kompakter Mengen wieder kompakt ist. Für halbmetrische Räume ist die den Durchschnitt betreffende Aussage falsch:*

*(b) Man gebe ein Beispiel zweier kompakten Teilmengen eines halbmetrischen Raumes, deren Durchschnitt nicht kompakt ist.*

Das folgende Resultat ist für sich interessant und hat Anwendungen in der algebraischen Topologie.

**Satz 1.6.28** (Lemma von Lebesque oder Münzwurf-Satz). *Sei $K$ eine kompakte Menge im halbmetrischen Raum $(X, d)$. Ist $\Omega$ eine Menge offener Mengen, die $K$ überdeckt, so gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit der Eigenschaft, daß jede Kugel $K_\varepsilon(x)$ mit $K_\varepsilon(x) \cap K \neq \emptyset$ ganz in einem $O \in \Omega$ enthalten ist.*

*Beweis.* Gilt $K \subset \bigcup_{O\in\Omega} O$, so bestimme man für jedes $x \in K$ ein $\delta_x > 0$ mit $K_{\delta_x}(x) \subset O$ für ein $O \in \Omega$. Die Überdeckung von $K$ durch $K_{\delta_x/3}(x)$, $x \in K$, hat eine endliche Teilüberdeckung $K_{\delta_{x_1}/3}(x_1), ..., K_{\delta_{x_n}/3}(x_n)$. Sei $\varepsilon = \min_{1\le i\le n} \delta_{x_i}/3$. Ist nun $x \in X$ mit $K_\varepsilon(x) \cap K \neq \emptyset$, so trifft $K_\varepsilon(x)$ auch ein $K_{\delta_{x_i}/3}(x_i)$, $1 \le i \le n$. Ist $y \in K_\varepsilon(x) \cap K_{\delta_{x_i}/3}(x_i)$, so gilt für beliebiges $z \in K_\varepsilon(x) : d(z, x_i) \le d(z, x) + d(x, y) + d(y, x_i) < \varepsilon + \varepsilon + \delta_{x_i}/3 \le \delta_{x_i}$, also $K_\varepsilon(x) \subset K_{\delta_{x_i}}(x_i) \subset O$ für ein $O \in \Omega$. □

**Übung 1.6.29.** *Man zeige, daß für Abbildungen zwischen halbmetrischen Räumen die Definition der Stetigkeit durch Folgen ("Folgenstetigkeit") mit der topologischen Definition der Stetigkeit (Urbilder offener Mengen sind offen) übereinstimmt.*

**Übung 1.6.30.** *Sei $1 \le p < \infty$. Auf $\mathcal{C}([0,1])$ betrachten wir die Metriken $d_p(f, g) = (\int_0^1 |f(x) - g(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}$ und $d_\infty(f, g) = \max_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|$. Sei $T : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathbb{C}$ die Punktauswertung im Punkte 1, d.h. die Abbildung $f \mapsto Tf = f(1)$. Man zeige:*

*(a) $T : (\mathcal{C}([0,1]), d_\infty) \to \mathbb{C}$ ist stetig.*

*(b) $T : (\mathcal{C}([0,1]), d_p) \to \mathbb{C}$ ist unstetig.*

*Hierbei sei $\mathbb{C}$ wie üblich mit der Metrik $d(\lambda, \mu) = |\lambda - \mu|$ versehen.*

**Übung 1.6.31.** *Sei $(X, d)$ ein halbmetrischer Raum und $X \times X$ mit der Metrik $d'((x, y), (x', y')) = d(x, x') + d(y, y')$ versehen. Man zeige, daß $d$ eine gleichmäßig stetige Abbildung von $X \times X$ nach $\mathbb{R}$ ist,*

**Übung 1.6.32.** *Man zeige: Sind $X$ und $Y$ metrische Räume und $f : X \to Y$ eine gleichmäßig stetige Abbildung , so besitzt $f$ genau eine stetige Fortsetzung $\hat{f} : \hat{X} \to \hat{Y}$. Die Abbildung $\hat{f}$ ist wieder gleichmäßig stetig.*

**Proposition 1.6.33.** *Sei $X$ ein kompakter topologischer Raum. Gibt es eine Folge $\{f_n\}$ stetiger Funktionen auf $X$, die Punkte von $X$ trennt (d.h. zu $x \neq y$ in $X$ gibt es ein $f_n$ mit $f_n(x) \neq f_n(y)$), so ist $X$ metrisierbar, d.h. es gibt eine Metrik $d$ auf $X$, deren zugehörige Topologie gleich der ursprünglichen Topologie von $X$ ist.*

*Beweis.* Sei $\{f_n\}$ eine Folge mit den genannten Eigenschaften. Ohne Einschränkung können wir $|f_n| \le 1\ \forall n \in \mathbb{N}$ annehmen. Durch $d(x, y) := \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n}|f_n(x) - f_n(y)|$ wird eine Metrik auf $X$ definiert (da $\{f_n\}$ Punkte von $X$ trennt), die als gleichmäßig konvergente Summe auf $X \times X$ stetiger Funktionen stetig auf $X \times X$ ist. Insbesondere ist $d_x : y \mapsto d(x, y)$ bei festem $x$ stetig auf $X$, jede

Kugel $K_r(x)$ als Urbild von $(-\infty, r)$ unter $d_x$ also offen in $X$. Es folgt, daß jede in $(X, d)$ offene Menge offen in $X$ ist, die Abbildung $id : X \to (X, d)$ also stetig ist. Nach 1.5.2 (e) ist auch deren Umkehrung stetig, und somit eine Menge genau dann in $X$ offen, wenn sie in $(X, d)$ offen ist. Die beiden Topologien stimmen also überein. $\square$

# Kapitel 2

# Normierte Räume

## 2.1 Grundbegriffe

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder sei $\mathbb{C}$ und $E$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

**Definition 2.1.1.** *Eine* **Norm** *auf $E$ ist eine Abbildung $\| \; \| : E \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|$ von $E$ nach $\mathbb{R}$ mit den Eigenschaften:*
*(i)* $\|x\| \geq 0$,
*(ii)* $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
*(iii)* $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ ,
*(iv)* $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *(Dreiecksungleichung)*
*für alle $x, y \in E, \lambda \in \mathbb{K}$.*
*Ist die Implikation $\Rightarrow$ der Bedingung (ii) nicht notwendig erfüllt, so heißt die Abbildung $x \mapsto \|x\|$ eine* **Halbnorm** *auf $E$. Ein Vektorraum mit einer Norm (Halbnorm) heißt* **normierter (halbnormierter) Raum**.

**Bemerkung.** (a) Bedingung (i) oben ist überflüssig, da sie schon aus (iii) und (iv) folgt. Dasselbe gilt für die Implikation $\Leftarrow$ von (ii), sie folgt aus (iii).

(b) Ist $(E, \| \; \|)$ ein halbnormierter Raum und $N = \{x \in E | \; \|x\| = 0\}$, so ist $(E/N, \| \; \|')$ mit $\|x + N\|' := \|x\|$ ein normierter Raum.

(c) Jeder normierte (halbnormierte) Raum ist in natürlicher Weise ein metrischer (halbmetrischer) Raum. Man setze $d(x, y) := \|x - y\|$.

**Definition 2.1.2.** *Ein normierter Raum, der als metrischer Raum vollständig ist, heißt* **Banach-Raum.**

**Beispiele 2.1.3.** *(a) $\mathbb{K}$ mit $\|x\| = |x|$ als Norm.*

*(b) $\mathbb{K}^n$ mit der Norm $\|x\|_p := (\sum_1^n |x_k|^p)^{1/p}$, wobei $1 \leq p < \infty$ eine feste Zahl ist.*

*(c) $\ell^p := \{\{x_n\} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \sum_1^\infty |x_n|^p < \infty\}$ mit der Norm $\|\{x_n\}\|_p := (\sum_1^\infty |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$. Hier ist, wie in (b), $p$ eine feste Zahl $\geq 1$.*

*(d) $\ell^\infty$ mit der Norm $\|\{x_n\}\|_\infty := \sup_n |x_n|$.*

*(e) $C([0, 1])$ mit der Norm $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$.*

Die Beispiele (c) - (e) bildet man auch mit den entsprechenden reellen Folgen bzw. Funktionen. Oft läßt sich dem Zusammenhang entnehmen, ob gerade der reelle oder der komplexer Raum gemeint ist. Bei den Beispielen (b) und (c) ist der Beweis der Dreiecksungleichung im Fall $p > 1$ nicht offensichtlich. Wir benutzen dazu folgendes

**Lemma 2.1.4.** *Seien $a, b \geq 0$, $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt:*

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$

*Beweis.* Ist $a$ oder $b$ gleich null, so ist die Behauptung erfüllt. Wir können also $a, b > 0$ annehmen. Da der Logarithmus auf $(0, \infty)$ eine konkave Funktion ist, gilt $\log(\frac{1}{p}a + \frac{1}{p}b) \geq \frac{1}{p}\log a + \frac{1}{q}\log b = \log a^{1/p} + \log b^{1/q}$. Anwendung der Exponentialfunktion liefert $\frac{1}{p}a + \frac{1}{q}b \geq a^{1/p}b^{1/q}$. Ersetzt man nun $a$ durch $a^p$ und $b$ durch $b^q$, so erhält man die Behauptung. □

Nächster Schritt ist

**Satz 2.1.5 (Höldersche Ungleichung).** . *Seien $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und $\{x_n\} \in \ell^p$, $\{y_n\} \in \ell^q$. Dann gilt:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leq \|\{x_n\}\|_p \; \|\{y_n\}\|_q.$$

*Beweis.* Ist eine der Normen auf der rechten Seite der Ungleichung null, so verschwinden alle Terme der linken Seite, womit die Behauptung erfüllt ist. Wir können also $\|\{x_n\}\|_p$, $\|\{y_n\}\|_q > 0$ annehmen. Da die Ungleichung bei Multiplikation mit positiven Skalaren erhalten bleibt, genügt es, die Behauptung für $\|\{x_n\}\|_p = \|\{y_n\}\|_q = 1$ zu zeigen. Nach obigem Lemma gilt $|x_n y_n| \leq \frac{1}{p}|x_n|^p + \frac{1}{q}|y_n|^q$, also

$$\sum_{1}^{\infty} |x_n y_n| \leq \frac{1}{p}\|\{x_n\}\|_q^q + \frac{1}{q}\|\{y_n\}\|_q^q = 1 = \|\{x_n\}\|_p \; \|\{y_n\}\|_q.$$

□

Nun können wir die Dreiecksungleichung für $\ell^p$ beweisen. Sie heißt **Minkowski-Ungleichung**.

**Satz 2.1.6 (Minkowski-Ungleichung).** *Sei $1 < p < \infty$ und $\{x_n\}$, $\{y_n\} \in \ell^p$. Dann gilt $\{x_n + y_n\} \in \ell^p$ und*

$$\|\{x_n + y_n\}\|_p \leq \|\{x_n\}\|_p + \|\{y_n\}\|_p$$

*Beweis.* Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned} |x_n + y_n|^p &= |x_n + y_n| \; |x_n + y_n|^{p-1} \\ &\leq (|x_n| + |y_n|) \; |x_n + y_n|^{p-1} \end{aligned} \tag{2.1.7}$$

Für $q = \frac{p}{p-1}$ (dann ist $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$) gilt $\{|x_n+y_n|^{p-1}\} \in \ell^q$ (wegen $|x_n+y_n|^{(p-1)q} = |x_n + y_n|^p \leq (2\max\{|x_n|, |y_n|\})^p \leq 2^p(|x_n|^p + |y_n|^p)$) Nach der Hölderschen Ungleichung gilt

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} |x_n||x_n + y_n|^{p-1} &\leq \|\{x_n\}\|_p \, \|\{|x_n + y_n|^{p-1}\}\|_q \\ &= \|\{x_n\}\|_p \|\{x_n + y_n\}\|_p^{p/q},\end{aligned}$$

analog $\sum_{n=1}^{\infty} |y_n| \; |x_n + y_n|^{p-1} \leq \|\{y_n\}\|_p \|\{x_n + y_n\}\|_p^{p/q}$, und mit 2.1.7 erhalten wir $\|\{x_n + y_n\|_p^p \leq (\|\{x_n\}\|_p + \|\{y_n\}\|_p) \cdot \|\{x_n + y_n\}\|_p^{p/q}$, also $\|\{x_n + y_n\}\|_p^{p-\frac{p}{q}} \leq \|\{x_n\}\|_p + \|\{y_n\}\|_p$, was wegen $p - \frac{p}{q} = 1$ gerade die Behauptung ist. Zuletzt haben wir implizit $\|\{x_n + y_n\}\|_p \neq 0$ benutzt. Im Fall $\|\{x_n + y_n\}\|_p = 0$ ist die Behauptung trivial erfüllt. □

Der soeben gegebene Beweis funktioniert auch für $L^p$-Funktionen auf einem beliebigen Maßraum, liefert also für allgemeines $L^p$ die Dreiecksungleichung.

**Bemerkung.** (a) Ist $E$ ein halbnormierter Raum über $\mathbb{K}$, so ist $E$ mit der von der Halbnorm herrührenden (d.h. mit Hilfe der zugehörigen Halbmetrik definierten) Topologie ein **topologischer Vektorraum**, d.h. die Skalarmultiplikation und die Addition als Abbildungen von $\mathbb{K} \times E$ nach $E$ bzw. von $E \times E$ nach $E$ sind stetig.

(b) Ist $M$ ein linearer Teilraum von $E$, so auch sein Abschluß$\overline{M}$. Dies folgt aus (a).

(c) Die Halbnorm $\|\cdot\|$ auf $E$ ist eine gleichmäßig stetige Abbildung von $(E, \|\cdot\|)$ (als halbmetrischem Raum) nach $\mathbb{R}$, denn wegen der Dreiecksungleichung gilt:

$$| \; \|x\| - \|y\| \; | \leq \|x - y\|.$$

(d) Aus der Dreiecksungleichung und der Stetigkeit der Halbnorm folgt: Ist $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergent, so gilt $\| \sum x_n\| \leq \sum \|x_n\|$, wobei die rechte Seite der Ungleichung natürlich $\infty$ sein kann.

(e) $E$ ist vollständig genau dann, wenn jede absolut konvergente Reihe in $E$ konvergiert. (Beweis siehe unten).

(f) Ist $E$ ein normierter Raum, so ist $\hat{E}$ (Vervollständigung als metrischer Raum) in natürlicher Weise ein Banachraum. Ist $d$ die Metrik in $\hat{E}$, so setzt man

$$\|x^{\sim}\| := d(x^{\sim}, 0^{\sim}) = \lim_{n\to\infty} \|x_n\|,$$

wobei $\{x_n\}$ eine Folge in $E$ mit $i(x_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x^{\sim}$ in $\hat{E}$ ist.

*Beweis.* (für (e)): $\Rightarrow$: Ist $E$ vollständig und $\sum_1^{\infty} \|x_n\| < \infty$, so sind die Partialsummen von $\sum_1^{\infty} x_n$ wegen der Dreiecksungleichung offenbar eine Cauchyfolge, konvergieren also in $E$.

$\Leftarrow$: Sei jede absolut konvergente Reihe in $E$ konvergent und sei $\{x_n\}$ eine Cauchyfolge in $E$. Es gibt eine Teilfolge $\{x_{n_i}\}$ mit $\|x_{n_i} - x_{n_{i+1}}\| < \frac{1}{2^i}$. Da

$\sum_1^\infty \|x_{n_{i+1}} - x_{n_i}\| < \infty$ gilt, konvergiert die Reihe $\sum_1^\infty (x_{n_{i+1}} - x_{n_i})$ in $E$, also auch $x_{n_1} + \sum_{i=1}^\infty (x_{n_{i+1}} - x_{n_i})$, deren $k-$te Teilsumme $x_{n_{k+1}}$ ist. Also hat die ursprüngliche Cauchyfolge eine konvergente Teilfolge und ist somit selbst konvergent, was die Vollständigkeit von $E$ beweist. □

**Proposition 2.1.8.** *Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein halbnormierter Raum und $N$ ein linearer Teilraum von $E$.*

*(i) Der Quotientenraum $E/N$ wird mit*

$$\|x + N\|' := \inf_{n \in N} \|x + n\|$$

*zu einem halbnormierten Raum $(E/N, \|\cdot\|')$. Dieser Raum ist genau dann normiert, wenn $N$ abgeschlossen in $E$ ist.*

*(ii) Ist $E$ vollständig und $N$ abgeschlossen, so ist $E/N$ mit $\| \quad \|'$ ein Banachraum.*

*Beweis.* (i) Auf die Gleichung $\|\lambda x + \lambda n\| = |\lambda| \|x + n\|$ wendet man $\inf_{n \in N}$ an und erhält $\|\lambda x + N\|' = |\lambda| \|x + N\|'$. Auf die Ungleichung $\|x + m + y + n\| \leq \|x + m\| + \|y + n\|$ wendet man $\inf_{m,n \in N}$ an und erhält $\|x + y + N\|' \leq \|x + N\|' + \|y + N\|'$. Also ist $\| \ \|'$ eine Halbnorm. Es gilt $\|x + N\|' = 0$ genau dann, wenn $x$ sich aus $N$ approximieren lässt, also $x \in \overline{N}$ gilt. Andererseits ist $x + N$ die Null in $E/N$ genau dann, wenn $x \in N$ gilt. Also ist $\| \ \|'$ genau dann eine Norm auf $E/N$, wenn $\overline{N} = N$ gilt.

(ii) Seien $x_k \in E$ mit $\sum_1^\infty \|x_n + N\|' < \infty$ und seien $n_k \in N$ so gewählt, dass $\|x_k + n_k\| < \|x_n + N\|' + \frac{1}{2^k}$ gilt. Da $E$ vollständig ist, folgt nach Bemerkung $(e)$ oben die Konvergenz von $\sum_1^\infty (x_k + n_k)$, ihr Grenzwert sei $z \in E$. Die kanonische Projektion $p : x \mapsto x + N$ von $E$ nach $E/N$ erfüllt $\|p(x)\|' \leq \|x\|$, ist also (sogar gleichmäßig) stetig. Somit gilt $\sum_1^\infty (x_k + N) \to z + N$, woraus nach Bemerkung $(e)$ die Vollständigkeit von $E/N$ folgt. Ist $N$ abgeschlossen, so ist $(E/N), \| \ \|')$ nach (i) auch normiert, also ein Banachraum. □

## 2.2 Lineare Operatoren

### Stetige lineare Operatoren

**Satz 2.2.1.** *Seien $E$ und $F$ halbnormierte Räume über $\mathbb{K}$ und $T : E \to F$ eine lineare Abbildung. Dann ist folgendes äquivalent:*

*(i) $T$ ist stetig im Nullpunkt.*

*(ii) $T$ ist stetig.*

*(iii) $T$ ist gleichmäßig stetig*

*(iv) Es gibt eine Konstante $C > 0$ mit $\|Tx\|_F \leq C \cdot \|x\|_E$ (d.h. $T$ ist „beschränkt“).*

*Beweis.* Die Implikationen (iv) ⇒ (iii) ⇒ (ii) ⇒ (i) sind klar. Wir zeigen noch (i) ⇒ (iv): Ist $T$ stetig in 0, so gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit $\|Tx\|_F \leq \varepsilon$ für alle $x \in E$ mit $\|x\|_E \leq \delta$. Für beliebiges $x \neq 0 \in E$ hat $\frac{\delta}{\|x\|_E}x$ die Länge (d.h. den Wert der Halbnorm) $\delta$, es gilt also

$$\|Tx\|_F = \|\frac{\|x\|_E}{\delta}T(\frac{\delta}{\|x\|_E}x)\|_F \leq \frac{\|x\|_E}{\delta} \cdot \varepsilon$$

d.h. mit $C = \frac{\varepsilon}{\delta}$ ist (iv) erfüllt. □

Die Menge der **beschränkten Operatoren** von $E$ nach $F$, d.h. der linearen Abbildungen $T : E \to F$, die (i) - (iv) oben erfüllen, bezeichnen wir mit ***B(E,F)***, und für $T \in B(E, F)$ bezeichnen wir mit $\|T\|$ die kleinste Konstante $C$ mit $\|Tx\|_F \leq C\|x\|_E$. Wegen $\|Tx\|_F \leq C\|x\|_E \Leftrightarrow \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} \leq C$ (für $x \neq 0$) ist

$$\|T\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|_E=1} \|Tx\|_F = \sup_{\|x\|_E\leq 1} \|Tx\|_F = \sup_{\|x\|_E<1} \|Tx\|_F.$$

**Bemerkung 2.2.2.** *(a) $(B(E, F),\ \|\cdot\|)$ ist ein halbnormierter Raum. Ist $F$ normiert bzw. ein Banach-Raum, so ist es auch $B(E, F)$. Insbesondere ist $E' := B(E, K)$ ein Banach-Raum. Er heißt der* **Dualraum von E***, seine Elemente beschränkte lineare Funktionale.*

*(b) Sind $E$ und $F$ normierte Räume und $T \in B(E, F)$, so gibt es genau ein $\hat{T} \in B(\hat{E}, \hat{F})$ mit $\hat{T}|_E = T$. Es gilt $\|\hat{T}\| = \|T\|$.*

*(c) Ist $E$ normiert, so ist $B(E, E)$ (oder auch kurz: $B(E)$) eine* **normierte Algebra***, d.h. ein normierter Raum und eine Algebra mit der Eigenschaft $\|TS\| \leq \|T\|\ \|S\|$. Ist $E$ vollständig, so ist $B(E)$ eine* **Banach-Algebra***, d.h. eine (als normierter Raum) vollständige normierte Algebra.*

## Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit

**Satz 2.2.3** (Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit)**.** *Seien $E$ ud $F$ halbnormierte Räume, $E$ vollständig, und $\{T_\lambda\}$ eine Familie in $B(E, F)$ mit*

$$\sup_\lambda \|T_\lambda x\|_F < \infty \text{ für alle } x \in E.$$

*Dann gilt:*

$$\sup_\lambda \|T_\lambda\| < \infty.$$

*Beweis.* Sei $A_n = \{x \in E \mid \|T_\lambda x\|_F \leq n \text{ für alle } \lambda\}$. Nach Voraussetzung gilt $\bigcup_n A_n = E$, und da die Mengen $A_n$ abgeschlossen in $E$ sind, gibt es nach dem Satz von Baire ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $A_{n_0} \supset K_\varepsilon(x) = x + K_\varepsilon(0)$ für ein geeignetes $x$ und $\varepsilon$. Für $y \in K_\varepsilon(0) = K_\varepsilon(x) - x \subset A_{n_0} - A_{n_0}$ gilt $\|T_\lambda y\|_F \leq n_0 + n_0$ für alle $\lambda$. Hieraus folgt $\|T_\lambda\| \leq \frac{2n_0}{\varepsilon} < \infty$ für alle $\lambda$, was die Behauptung beweist. □

**Korollar 2.2.4** (Satz von Banach-Steinhaus)**.** *Sei $E$ ein vollständiger halbnormierter Raum, $F$ ein normierter Raum und $\{T_n\}$ eine Folge in $B(E; F)$, so daß*

*$\{T_n x\}$ für jedes $x \in E$ konvergiert. Dann ist die Abbildung*

$$\begin{aligned} T : E &\to F \\ x &\mapsto Tx := \lim_{n\to\infty} T_n x \end{aligned}$$

*aus $B(E, F)$*

*Beweis.* Dass $T$ linear ist, folgt aus $\lim T_n(\alpha x+\beta y) = \alpha \lim T_n x+\beta \lim T_n y$ (hier benötigen wir übrigens, dass $F$ normiert ist, da sonst die Limites nicht eindeutig bestimmen wären). Aus dem Prinzip der *gleichmäßigen Beschränktheit* erhalten wir $C = \sup_n \|T_n\| < \infty$, also $\|Tx\|_F \leq C\|x\|_E$. □

## Satz von der offenen Abbildung

**Satz 2.2.5** (Satz von der offenen Abbildung)**.** *Sei $E$ vollständig halbnormiert, $F$ ein Banachraum und $T \in B(E, F)$ surjektiv. Dann ist $T$ offen, d.h. Bilder offener Mengen sind offen.*

*Beweis.* (a) Es genügt zu zeigen, dass für jedes $s > 0$ die Menge $TK_s(0)$ eine Kugel $K_\eta(0)$ enthält, denn ist $O \subset E$ offen, $x \in O$ und $K_s(x) \subset O$, so folgt aus $TK_s(0) \supset K_\eta(0)$ dass $TO \supset TK_s(x) = T(K_s(0) + x) \supset K_\eta(0) + Tx$ gilt, also $TO$ offen ist.

(b) Im Folgenden bezeichnen wir $K_r(0)$ in $E$ bzw. $F$ kurz mit $E_r$ bzw. $F_r$.Wir zeigen daß $\overline{TE_r}$ eine Nullumgebung enthält. Wegen $E = \bigcup_{n=1}^\infty n\, E_{r/2}$ und der Surjektivität von $T$ gilt $F = \bigcup_{n=1}^\infty n\, TE_{r/2}$, es gibt also nach dem Satz von Baire ein $n_0$ mit $\overline{n_0\, TE_{r/2}} \supset K_\delta(y)$ für geeignetes $\delta > 0$ und $y \in F$. Nun gilt

$$K_\delta(0) = K_\delta(y) - y \subset \overline{n_0\, TE_{r/2}} - \overline{n_0\, TE_{r/2}} \subset \overline{n_0\, TE_r},$$

Und da Skalarmultiplikation mit $\frac{1}{n_0}$ ein Homöomorphismus ist, folgt

$$\overline{TE_r} \supset K_\varepsilon(0) = F_\varepsilon$$

für ein $\varepsilon > 0$.

(c) Wir behaupten nun $TE_s \supset \overline{TE_r}$ für jedes $s > r$ und beweisen dies mit einem iterativen Argument. Ist $s > r$ und $\{r_n\}$ eine Folge positiver Zahlen mit $\sum_1^\infty r_n = s - r$, so gibt es gemäß (b) zu jedem $r_n$ ein geeignetes $\varepsilon_n > 0$ mit

(i) $$\overline{TE_{r_n}} \supset F_{\varepsilon_n} \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

und wir können $\varepsilon_n \to 0$ annehmen. Sei nun $y \in \overline{TE_r}$. Es gibt $x_1 \in E_r$ mit $\|y - Tx_1\|_F < \varepsilon_1$, also $y - Tx_1 \in F_{\varepsilon_1}$. Ist nun $n - 1 \geq 1$, sind $x_1, ..., x_{n-1}$ schon gewählt und ist $\|y - \sum_{i=1}^{n-1} Tx_i\|_F < \varepsilon_{n-1}$, also $y - \sum_{i=1}^{n-1} Tx_i \in F_{\varepsilon_{n-1}}$, so gibt es nach (i) ein $x_n \in E_{r_{n-1}}$ mit $\|(y - \sum_{i=1}^{n-1} Tx_i) - Tx_n\|_F < \varepsilon_n$. Für die so induktiv definierte Folge $\{x_i\}$ gilt

(ii) $\sum_{i=1}^\infty \|x_i\|_E < r+\sum_{i=1}^\infty r_i = s$. Da $E$ vollständig ist, konvergiert $\sum_{i=1}^n x_i$ gegen einen Grenzwert $x \in E_s$.

(iii) $\|y - \sum_{i=1}^n Tx_i\|_F < \varepsilon_n \to 0$, also $\sum_{i=1}^n Tx_i \to y$. Da $T$ linear und stetig ist, folgt $Tx = y$. Damit ist $TE_s \supset \overline{TE_r}$ für $s > r$ gezeigt und wegen (b) und (a) der Beweis beendet. □

**Bemerkung.** Der soeben bewiesene Satz gilt allgemeiner für $F$-Räume, d.h. topologische Vektorräume, die durch eine translationsinvariante Metrik vollständig metrisierbar sind, insbesondere für Frecheträume (das sind gerade die lokal konvexen $F$-Räume). Der Beweis bleibt gleich, wenn man Ausdrücke der Form $\|a-b\|$ als $d(a,b)$ und dementsprechend $\|a\|$ als $d(a,o)$ liest. Wie aus dem Beweis ersichtlich, braucht der Ausgangsraum $E$ nicht separiert zu sein.

**Korollar 2.2.6.** *Seien $E$ und $F$ Banach-Räume und $T \in B(E,F)$ bijektiv. Dann gilt:*

$$T^{-1} \in B(F,E),$$

*d.h. die Umkehrabbildung ist stetig, oder anders ausgedrückt: Es gibt ein $C > 0$ mit $\|Tx\|_F \geq C\|x\|_E$ für alle $x \in E$.*

**Korollar 2.2.7.** *Ist $E$ mit jeder der beiden Normen $\|\ \|_1$ und $\|\ \|_2$ ein Banach-Raum und gilt $\|\ \|_1 \leq C\|\ \|_2$, so gilt auch*

$$\|\ \|_2 \leq C'\|\ \|_1.$$

### Satz vom abgeschlossenen Graphen

**Definition 2.2.8.** *Ist $f : E \to F$ eine Abbildung, so heißt $G_f := \{(x, f(x)) \in E \times F | x \in E\}$ der* **Graph von $f$**. *Die Abbildung $f$ heißt* **abgeschlossen**, *wenn ihr Graph als Teilmenge von $(E \times F, \|\ \|)$, wobei $\|(x,y)\| := \|x\|_E + \|y\|_F$, abgeschlossen ist.*
**Achtung:** *Diese Begrifffsbildung ist inkonsequent, vgl. offene Abbildung.*

**Bemerkung.** Sind $E$ und $F$ normierte Räume und $T \in B(E;F)$, so ist $T$ abgeschlossen. Für Banach-Räume gilt auch die Umkehrung:

**Satz 2.2.9** (Satz vom abgeschlossenen Graphen)**.** *Seien $E$ und $F$ Banach-Räume und $T : E \to F$ linear und abgeschlossen. Dann ist $T$ stetig.*

*Beweis.* (a) Der Graph $G_T$ ist ein linearer Teilraum von $E \times F$.

(b) Nach Voraussetzung ist $G_T$ abgeschlossen in $E \times F$, und da $E \times F$ ein Banach-Raum ist (leicht zu verifizieren), ist auch $G_T$ ein Banach-Raum, mit der Norm $\|(x,Tx)\| = \|x\|_E + \|Tx\|_F$.

(c) Die Abbildung $(x,Tx) \mapsto x$ von $G_T$ nach $E$ ist linear, bijektiv, und normvermindernd, also stetig. Nach dem Satz von der offenen Abbildung ist die Umkehrabbildung stetig, also aus $B(E, G_T)$. Es gibt somit ein $C > 0$, so dass $\|x\|_E + \|Tx\|_F \leq C\|x\|_E$, insbesondere $\|Tx\|_F \leq C\|x\|_E$ gilt. Damit ist die Behauptung gezeigt. □

## 2.3 Die Sätze von Hahn-Banach

Um die Sätze von Hahn-Banach beweisen zu können, erinnern wir an das **Lemma von Zorn.** Sei $(X, \leq)$ eine induktiv geordnete Menge, d.h. gelte

(i) $x \leq x$
(ii) $x \leq y, y \leq x \Rightarrow x = y$
(iii) $x \leq y, y \leq x \Rightarrow x \leq z$.
und es gebe für jede total geordnete Teilmenge $M \subset X$ eine obere Schranke $x \in X$ ($m \leq x$ für alle $m \in M$). Dann besitzt $X$ ein maximales Element $z$ (d.h. es gibt kein größeres Element, also $z \leq x \Rightarrow x = z$). Natürlich braucht dieses $z$ nicht eindeutig bestimmt zu sein.

## Satz von Hahn-Banach, reelle Version

**Satz 2.3.1** (Satz von Hahn-Banach, reelle Version)**.** *Sei $E$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, $F$ ein linearer Teilraum und $p : E \to \mathbb{R}$ subadditiv und positiv homogen, erfülle also $p(x+y) \leq p(x)+p(y)$ und $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ für $x, y \in E$, $\lambda > 0$. Ist $f : F \to \mathbb{R}$ ein lineares Funktional mit $f(x) \leq p(x)$ für alle $x \in F$, so gibt es ein lineares Funktional $\tilde{f} : E \to \mathbb{R}$ mit $\tilde{f}|_F = f$ und $\tilde{f}(x) \leq p(x)$ für alle $x \in E$.*
*Ist $p$ eine Halbnorm, so gilt automatisch $|f| \leq p$ und $|\tilde{f}| \leq p$.*

*Beweis.* (a) Seien $E, F, f$ und $p$ wie oben und $x \in E \backslash F$, $z, z' \in F$. Es gilt $f(z) + f(z') = f(z + z') \leq p(z + z') \leq p(z + x) + p(z' - x)$, also

$$f(z') - p(z' - x) \leq -f(z) + p(z + x).$$

Die linke Seite dieser Ungleichung hängt von $z'$, die rechte von $z$ ab, es gibt also eine Konstante $c$, die zwischen dem Supremum der linken und dem Infinum der rechten Seite liegt. Auf dem Raum $F + \{\lambda x \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ erklären wir $\tilde{f}$ durch $\tilde{f}(z + \lambda x) = f(z) + \lambda c$. Wegen $f(z) - p(z - x) \leq c \leq -f(z) + p(z + x)$ gilt

$$f(z) - c \leq p(z - x) \text{ und } f(z) + c \leq p(z + x).$$

Multiplizieren wir diese Ungleichungen mit $\alpha > 0$ und ersetzen $\alpha z$ durch $z$, so ergibt sich

$$\tilde{f}(z - \alpha x) \leq p(z - \alpha x) \text{ und } \tilde{f}(z + \alpha x) \leq p(z + \alpha x),$$

also $\tilde{f}(z + \lambda x) \leq p(z + \lambda x)$ für $\lambda \in \mathbb{R}$ (denn für $\lambda = 0$ gilt die Ungleichung nach Voraussetzung).
Ergebnis: Wir haben $f$ zu $\tilde{f}$ auf dem Raum $F + \{\lambda x \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ fortgesetzt, und zwar so, dass die Fortsetzung $\tilde{f}$ ebenfalls $\tilde{f} \leq p$ erfüllt.

(b) Sei $X$ die Menge aller Paare $(G, g)$, wobei $G$ ein linearer Teilraum von $E$ ist, der $F$ enthält, und $g : G \to \mathbb{R}$ ein lineares Funktional mit $g|_F = f$ und $g(x) \leq p(x)$ für alle $x \in G$ ist. Wir erklären eine induktive Ordnung $\leq$ durch

$$(G, g) \leq (G', g'), \text{ wenn } G \subset G' \text{ und } g'|_G = g \text{ ist.}$$

Ist $M$ eine total geordnete Teilmenge von $X$, so ist $(H, h)$ eine obere Schranke für $M$, wenn $H = \bigcup_{(G,g) \in M} G$ und $h(x) = g(x)$ für $x \in G$, $(G, g) \in M$. Man beachte, dass $h$ wohldefiniert ist. Nach dem Lemma von Zorn gibt es in $X$ ein maximales Element $(K, k)$. Nach $(a)$ muss $K = E$ gelten, weil wir sonst noch um eine Dimension fortsetzen könnten, was der Maximalität von $(K, k)$ widerspräche.

Ist $p$ eine Halbnorm und $f(y) \leq p(y)$, so gilt auch $-f(y) = f(-y) \leq p(-y) = p(y)$, also $|f(y)| \leq p(y)$. Entsprechend für $\tilde{f}$. □

## Satz von Hahn-Banach, komplexe Version

**Satz 2.3.2** (Satz von Hahn-Banach, komplexe Version)**.** *Sei $E$ ein Vektorraum über $\mathbb{C}$, $F$ ein linearer Teilraum und $p$ eine Halbnorm auf $E$. Ist $f$ ein lineares Funktional auf $F$ mit $|f(x)| \leq p(x)$ für $x \in F$, so gibt es ein lineares Funktional $\tilde{f}$ auf $E$ mit $\tilde{f}|_F = f$ und $|\tilde{f}(x)| \leq p(x)$ für $x \in E$.*

*Beweis.* Sei $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$ mit $f_k(x) \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2$. Dann sind $f_1$ und $f_2$ $\mathbb{R}$-lineare Abbildungen von $F$ nach $\mathbb{R}$, und es gilt $|f_k(x)| \leq p(x)$ für $k = 1, 2$. Aus $f(ix) = if(x)$ folgt $f_2(x) = -f_1(ix)$. Nach dem vorigen Satz gibt es eine reell-lineare Fortsetzung $\tilde{f}_1 : E \to \mathbb{R}$ mit $|\tilde{f}_1(x)| \leq p(x)$ für $x \in E$. Setzen wir $\tilde{f}(x) = \tilde{f}_1(x) - i\tilde{f}_1(ix$, so ist $\tilde{f}$ eine Fortsetzung von $f$, außerdem $\mathbb{C}$-linear, wofür es genügt, $\tilde{f}(ix) = i\tilde{f}(x)$ nachzuprüfen. Es bleibt noch $|\tilde{f}(x)| \leq p(x)$ zu zeigen. Bei festem $x$ ist für geeignetes $t \in [0, 2\pi|$

$$|\tilde{f}(x)| = \tilde{f}(x)e^{it} = \tilde{f}(e^{it}x) \geq 0, \text{ also}$$
$$|\tilde{f}(x)| = \tilde{f}(e^{it}x) = \tilde{f}_1(e^{it}x) \leq p(e^{it}x) = p(x).$$

Damit ist der Beweis beendet. □

## Folgerungen

**Korollar 2.3.3.** *Ist $E$ ein halbnormierter Raum und $F$ ein (linearer) Unterraum, so läßt sich jedes $f \in F'$ zu einem $\tilde{f} \in E'$ mit $\|\tilde{f}\| = \|f\|$ fortsetzen.*

*Beweis.* Sei $p(x) = \|f\| \, \|x\|$. Dies ist eine Halbnorm, und es gilt $|f(x)| \leq p(x)$ für $x \in F$. Es gibt ein Funktional $\tilde{f}$ auf $E$ mit $\tilde{f}|_F = f$ und $|\tilde{f}(x)| \leq p(x)$ für $x \in E$. Diese letzte Ungleichung besagt: $\tilde{f} \in E'$ und $\|\tilde{f}\| \leq \|f\|$, und da natürlich $\|\tilde{f}\| \geq \|f\|$ gilt, folgt $\|\tilde{f}\| = \|f\|$. □

**Korollar 2.3.4.** *Ist $E$ ein halbnormierter Raum und $x \in E$ mit $\|x\| \neq 0$, so gibt es ein $f \in E'$ mit $f(x) = \|x\|$ und $\|f\| = 1$.*

*Beweis.* Sei $F = \{\lambda x | \lambda \in \mathbb{K}\}$. Wir definieren $g(\lambda x) = \lambda \|x\|$. Offenbar gilt $g \in F'$, $\|g\| = 1$. Ist $f$ eine Fortsetzung von $g$ wie im vorigen Korollar, so ist damit die Behauptung erfüllt. □

**Bemerkung** Aus Korollar 2.3.4 ergibt sich insbesondere, dass der Dualraum $E'$ eines halbnormierten Raumes $E$ stets $\neq \{0\}$ ist, außer im Trivialfall $\| \, \|_E = 0$.

**Korollar 2.3.5.** *Ist $F$ ein abgeschlossener Teilraum des halbnormierten Raumes $E$ und $x \notin F$, so gibt es ein $g \in E'$ mit $g|_F = 0$, $g(x) = 1$.*

*Beweis.* Betrachte $E/F$. Da $\|x+F\| \neq 0$, kann voriges Korollar auf $E/F$ angewendet werden: Es gibt $f \in (E/F)'$ mit $f(x+F) \neq 0$. Die Abbildung $g : y \mapsto \frac{f(y+F)}{f(x+F)}$ genügt der Behauptung. □

Auch die Korollare (2.3.3)-(2.3.5) werden als **Hahn-Banach-Sätze** bezeichnet.

**Beispiele von Dualräumen** Das Zeichen $\cong$ bedeutet im Folgenden isometrische Isomorphie d.h. Existenz einer isometrischen bijektiven linearen Abbildung zwischen den betreffenden Räumen.

(a) $c_0' \cong \ell^1$ (wobei $c_0$ = Raum der Nullfolgen mit Supremumsnorm)

(b) $(\ell^1)' \cong \ell^\infty$

(c)$(\ell^p)' \cong \ell^q$ (wobei $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$)

(d) $C([0,1])' \cong M([0,1])$ (= Raum der beschränkten regulären Borel-Maße auf $[0,1]$)

(e) $L^p([0,1])' \cong L^q([0,1])$ (wobei $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$)

(f) $L^1([0,1]' \cong L^\infty([0,1])$

(g) $(\mathbb{K}^n)' \cong \mathbb{K}^n$.

In jedem der genannten Fälle definiert ein Element der Menge rechts vom Isomorphiezeichen in kanonischer Weise ein Element der linken Seite. Zum Beispiel im Fall (a) erhält man zu jedem $g \in \ell^1$ ein Funktional $\varphi_g \in c_0^1$ durch die Definition $\varphi_g(f) := \sum_{x \in \mathbb{N}} f(x)g(x)$. Dass die Abbildung $\varphi : g \mapsto \varphi_g$ von $\ell^1$ nach $c_0'$ ein isometrischer Isomorphismus ist, zeigt man leicht mit elementaren Methoden der Analysis. Entsprechendes gilt für (b). Bei den Fällen (d), (e), (f) werden die Funktionale $\varphi_g$ mit Integration statt Summation definiert und man benutzt Kenntnisse der Maßtheorie, bei (d) insbesondere den Rieszschen Darstellungssatz für stetige lineare Funktionale auf $\mathcal{C}([0,1])$. (c) und (e) sind Spezialfälle eines allgemeinen Resultats der Maßtheorie: Für $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und ein beliebiges Maß$\mu$ gilt $L^p(\mu)' \cong L^q(\mu)$. Im Fall (g) gilt die isometrische Isomorphie, wenn $\mathbb{K}^n$ mit der Norm $\| \ \|_2$ versehen ist. Bei Verwendung einer anderen Norm kann man keine Isometrie erwarten, aber die Isomorphie bleibt erhalten. Ist $\| \ \|$ eine beliebige Norm auf $\mathbb{K}^n$, so gibt es aber eine Norm $\| \ \|'$ auf $\mathbb{K}^n$ mit $(\mathbb{K}^n, \| \ \|)' \cong (\mathbb{K}^n, \| \ \|')$ (isometrisch isomorph). Man erhält $\| \ \|'$, indem man die Norm auf dem Dualraum mit dem Isomorphismus $\varphi$ transportiert, also $\|g\|' := \|\varphi_g\|$ für $g \in \mathbb{K}^n$ setzt. Sind $p$ und $q$ wie in (c) und ist $\| \ \| = \| \ \|_p$, so ist $\| \ \|' = \| \ \|_q$.

Wir geben für (c) noch einen direkten Beweis:

(i) Für $g = \{g_n\} \in \ell^q$ und $f = \{f_n\} \in \ell^p$ definiert $\varphi_g(f) = \sum_1^\infty g_n f_n$ wegen der Hölderschen Ungleichung ein Funktional $\varphi_g \in (\ell^p)'$ mit $\|\varphi_g\| \leq \|g\|_q$, und die Abbildung $\varphi : g \mapsto \varphi_g$ von $\ell^q$ nach $(\ell^p)'$ ist injektiv, denn $\varphi_g = 0$ impliziert $g = 0$.

(ii) Sei nun $\psi \in (\ell^p)'$, und sei $g_n = \psi(e_n)$, $n \in \mathbb{N}$, wo $e_n$ der $n$-te Einheitsvektor $(0, ...0, 1, 0, ...)$ ist. Für $N \in \mathbb{N}$ sei $f_n = |g_n|^q / g_n$ falls $g_n \neq 0$, sonst null. Für $N \in \mathbb{N}$ gilt nun $\sum_1^N |f_n|^p = \sum_1^N |g_n|^{p(q-1)} = \sum_1^N |g_n|^q$ und $\sum_1^N |g_n|^q = \sum_1^N g_n f_n = \sum_1^N f_n \psi(e_n) = \psi(\sum_1^N f_n e_n) \leq \|\psi\|(\sum_1^N |f_n|^p)^{1/p} = \|\psi\|(\sum_1^N |g_n|^q)^{1/p}$, also $(\sum_1^N |g_n|^q)^{1-\frac{1}{p}} = (\sum_1^N |g_n|^q)^{\frac{1}{q}} \leq \|\psi\|$. Somit gilt $g = \{g_n\} \in \ell^q$ und wegen $\psi(e_n) = g_n = \varphi_g(e_n)$ $\psi = \varphi_g$ auf dem dichten Teilraum $lin\{e_n | n \in \mathbb{N}\}$, also $\psi = \varphi_g$ auf ganz $\ell^p$, denn beide Funktionale sind stetig. Dies und $\|g\|_q \leq \|\psi\|$ zeigt zusammen mit (i), dass $\psi : g \mapsto \varphi_g$ ein isometrischer Isomorphismus von $\ell^q$ auf $(\ell^p)'$ ist.

**Notation.** Ist $E$ ein halbnormierter Raum, $E'$ sein Dualraum, $x \in E$ und $x' \in E'$, so schreiben wir für $x'(x)$ auch $\langle x, x' \rangle$.

**Einbettung eines normierten Raumes in seinen Bidualraum.** Ist $E$ ein normierter Raum, so gibt es eine kanonische Einbettung $J$ (genauer $J_E$) von $E$ in seinen Bidualraum (oder: Bidual) $E'' := (E')'$. Für $x \in E$ definiert man $Jx \in E''$ durch $(Jx)(x') := x'(x) = \langle x, x' \rangle$, wobei $x' \in E'$. Die Abbildung $J : E \to E''$, $x \mapsto Jx$ ist linear und es gilt $\|Jx\| \leq \|x\|$. Nach Hahn-Banach gibt es zu $x \neq 0 \in E$ ein $x' \in E'$ mit $\|x'\| = 1$ und $\langle x, x' \rangle = \|x\|$, also folgt $\|Jx\| = \|x\|$, d.h. $J$ ist eine Isometrie, insgesamt also ein isometrischer Isomorphismus von $E$ auf $JE \subset E''$.

## Adjungierte Abbildungen

Seien $E, F$ halbnormierte Räume mit Dualräumen $E', F'$.

**Satz 2.3.6.** *Zu jedem $A \in B(E,F)$ gibt es genau ein $A' \in B(F',E')$ mit $\langle Ax, y' \rangle = \langle x, A'y' \rangle$ für $x \in E, y' \in F'$. Es gilt $\|A'\| = \|A\|$.*

*Beweis.* Die Gleichung oben definiert $A'y'$ als $y' \circ A$, woraus die erste Behauptung sowie $\|A'\| \leq \|A\|$ folgt. Es ist

$$\begin{aligned}\|A'\| &= \sup_{\|y'\|\leq 1} \|A'y'\| = \sup_{\|y'\|\leq 1} \sup_{\|x\|\leq 1} |\langle x, A'y' \rangle| \\ &= \sup_{\|x\|\leq 1} \sup_{\|y'\|\leq 1} |\langle Ax, y' \rangle| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\| = \|A\|.\end{aligned}$$

Übrigens haben wir beim vorletzten Gleichheitszeichen den Satz von Hahn-Banach (Korollar 2.3.4) benutzt. □

**Definition 2.3.7.** *Der im letzten Satz definierte Operator $A'$ heißt der zu $A$* **adjungierte** *(oder: konjugierte, duale)* **Operator.**
*Achtung: Im Hilbertraum wird der adjungierte Operator etwas anders definiert.*

**Bemerkung:** Wie aus der $A'$ definierenden Gleichung hervorgeht, gilt $(\mathrm{Id}_X)' = \mathrm{Id}_X$, sowie $(AB)' = B'A'$, also ist $'$ ein kontravarianter Funktor von der Kategorie der halbnormierten Räume in die Kategorie der Banachräume, jeweils mit den stetigen linearen Abbildungen als Morphismen. Insbesondere

ist für (stetig) invertierbares $A \in B(E,F)$ auch $A' \in B(F',E')$ invertierbar. Im Fall von Banachräumen $E,F$ gilt auch die Umkehrung, wie wir in Kürze zeigen werden. Man benutzt als Hilfsmittel die kanonische Einbettung eines normierten Raumes $E$ in seinen Bidualraum $E''$. Sind $E,F$ normierte Räume mit kanonischen Einbettungen $J_E, J_F$ in $E''$ bzw. $F''$, und ist $x \in E$, $y' \in F'$, so gilt für $T \in B(E,F)$:
$[T''(J_E x)](y') = (J_E x)(T'y') = \langle x, T'y\rangle = \langle Tx, y'\rangle = [J_F(Tx)](y')$, also

$$T'' \circ J_E = J_F \circ T$$

Identifiziert man $E,F$ vermöge $J_E$, $J_F$ mit $J_E E \subset E''$ bzw. $J_F F \subset F''$, so bedeutet die Gleichung, dass $T''$ auf $E$ mit $T$ übereinstimmt.

**Satz 2.3.8.** *Seien $E,F$ Banachräume und $T \in B(E,F)$. Es gilt: $T$ ist invertierbar $\Leftrightarrow T'$ ist invertierbar.*

*Beweis.* Wegen obiger Bemerkung ist nur noch $\Leftarrow$ zu zeigen. Sei $T'$ invertierbar, also auch $T''$ invertierbar. Da $T'$ injektiv ist, gilt $\overline{TE} = F$. Da $T''$ invertierbar ist, gilt $c\|x''\| \leq \|T''x''\| \leq d\|x''\| \forall x'' \in E''$, wo $c = \|(T'')^{-1}\|^{-1}$, $d = \|T''\|$. Setzt man $x'' = J_E X$ und berücksichtigt $T''J_E = J_F T$, so erhält man $c\|x\| \leq \|Tx\| \leq d\|x\|$. Also ist $T$ bistetig von $E$ auf $TE$, mithin $TE$ vollständig und somit abgeschlossen, also $TE = \overline{TE} = F$, und die Abbildung $Tx \mapsto x$ ist stetig und invers zu $T$. □

**Definition 2.3.9.** *Seien $E,F$ halbnormierte Räume. Für eine Teilmenge $S \subset E$ heißt*

$$S^\circ := \{x' \in E' | \langle x, x'\rangle = 0 \ \forall x \in S\}$$

*der* **Annihilator** *(oder:* **Annullator***)* **von S** *in $E'$.*
*Für eine Teilmenge $R \subset E'$ heißt*

$$^\circ R := \{x \in E | \langle x, x'\rangle = 0 \ \forall x' \in R\}$$

*der* **Annihilator** *(oder:* **Annullator***)* **von R** *in $E$.*

**Bemerkung** (a) $S^\circ$ und $^\circ R$ sind abgeschlossene lineare Teilräume von $E'$ bzw. $E$.

(b) Für beliebiges $R \subset E'$ gilt $(^\circ R)^\circ \supset \overline{R}$ (dies folgt aus der Definition und (a)).

(c) Wenn $S$ ein linearer Unterraum von $E$ ist, gilt $^\circ(S^\circ) = \overline{S}$ (Beweis mit Hahn-Banach, die Inklusion $\supset$ ist klar nach Definition und (a)).

**Korollar 2.3.10.** *Für jedes $A \in B(E,F)$ gilt $N(A') = R(A)^\circ$ und $\overline{R(A)} = {}^\circ N(A')$, wobei $N$ bzw. $R$ Kern bzw. Bild eines Operators bezeichnet.*

*Beweis.* (i) $N(A') = R(A)^\circ$, denn $y' \in N(A')$ gilt genau dann, wenn $A'y' = 0$, also $\langle x, A'y'\rangle = \langle Ax, y'\rangle = 0 \ \forall x \in E$ gilt, d.h. wenn $y'$ zum Annihilator $R(A)^\circ$ gehört. (ii) Die Gleichheit $^\circ N(A') = \overline{R(A)}$ folgt aus (i) und (c) der Bemerkung. □

## Reflexivität

**Definition 2.3.11.** *Sei $E$ ein normierter Raum, $J$ seine kanonische Einbettung in $E''$. $E$ heißt* **reflexiv***, wenn $J(E) = E''$ gilt, also $J$ surjektiv ist.*

**Bemerkung.** (a) $E$ ist also genau dann reflexiv, wenn $J$ ein isometrischer Isomorphismus von $E$ auf $E''$ ist.

(b) Ist $E$ reflexiv, so ist es vollständig, also ein Banachraum. Denn die Dualräume halbnormierter Räume sind vollständig (Bemerkung 2.2.2 (a)).

**Satz 2.3.12.** *Sei $E$ ein Banachraum. $E$ ist genau dann reflexiv, wenn sein Dualraum $E'$ reflexiv ist.*

*Beweis.* (i) Sei $E$ reflexiv und $x''' \in E'''$. Dann ist $x''' \circ J_E \in E'$. Wir zeigen $J_{E'}(x''' \circ J_E) = x'''$. Sei $x'' \in E''$, $x'' = J_E x$ mit $x \in E$. Es gilt $[J_{E'}(x''' \circ J_E)](x'') = x''(x''' \circ J_E) = (J_E x)(x''' \circ J_E) = (x''' \circ J_E)(x) = x'''(x'')$. Somit ist $J_{E'}$ surjektiv, also $E'$ reflexiv.

(ii) Sei $E'$ reflexiv. Wäre $E$ nicht reflexiv, so gäbe es ein $x'' \in E'' \backslash J_E E$. Nach Hahn-Banach existiert dann ein $x''' = J_{E'} x' \in E'''$ mit $x'''(x'') = \langle x', x'' \rangle = 1$ und $x'''(J_E E) = \langle x', J_E E \rangle = \langle E, x' \rangle = 0$, also $x' = 0$, ein Widerspruch. Folglich muss $E$ reflexiv sein. □

**Satz 2.3.13.** *Ist $E$ reflexiv, $M \subset E$ ein abgeschlossener Unterraum, so ist sowohl $M$ als auch $E/M$ reflexiv.*

*Beweis.* (i) Jedes $m'' \in M''$ definiert ein Funktional $e(m'')$ auf $E'$ durch
$e(m'')(\varphi) := m''(\varphi_{|M})$ für $\varphi \in E'$. Wegen $|m''(\varphi_\mu)| \leq \|m''\| \, \|\varphi_{|M}\| \leq \|m''\| \, \|\varphi\|$ ist $e(m'')$ beschränkt, also in $E''$. Da $E$ reflexiv ist, gibt es $x \in E$ mit $J_E x = e(m'')$. Es gilt $x \in M$, denn wäre $x \notin M$ gäbe es in $\varphi \in E'$ mit $\varphi(M) = 0$ und $\varphi(x) = 1$, also $1 = \varphi(x) = J_E x(\varphi) = e(m'')(\varphi) = m''(\varphi_{|M}) = 0$, was nicht sein kann. Wir zeigen $J_M x = m''$. Sei $\psi \in M'$, $\varphi \in E'$ eine Fortsetzung von $\psi$ auf $E$. Nun gilt $J_M x(\psi) = \psi(x) = \varphi(x) = J_E x(\varphi) = e(m'')(\varphi) = m''(\varphi|_M) = m''(\psi)$, also $J_M x = m''$. Somit ist $J_M$ surjektiv, also $M$ reflexiv.

(ii) Wegen $(E/M)' \cong M^\circ$ (vgl. Übung 2.4.23) und der Tatsache, dass $M^\circ$ in $E'$ abgeschlossen ist, folgt die Reflexivität von $E/M$ aus (i) und dem Satz 2.3.12. □

## Schwache Topologie und Schwach$^*$-Topologie

Sei $E$ ein normierter Vektorraum, $E'$ sein Dualraum.

**Definition 2.3.14.** *Die* **schwache Topologie** *auf $E$ ist die von $E'$ auf $E$ induzierte Topologie, d.h. die gröbste Topologie auf $E$, für die jedes $x' \in E'$ eine stetige Abbildung ist. Die* **schwach*-Topologie** *auf $E'$ ist die von $E$ auf $E'$ induzierte Topologie, d.h. die gröbste Topologie auf $E'$, so dass die Abbildung $x' \mapsto (x, x')$ für jedes $x \in E$ stetig ist. Auf dem Dualraum $E'$ eines reflexiven Raumes $E$ stimmen die beiden Topologien überein, da jedes $x'' \in E''$ sich als Punktauswertung $x' \mapsto x'(x)$ mit einem $x \in E$ schreiben läßt.*

**Bemerkung.** Ein Netz $\{x_\alpha\}$ in $E$ konvergiert schwach gegen $x$ genau dann, wenn $\langle x_\alpha, x'\rangle \to \langle x, x'\rangle$ gilt für jedes $x' \in E'$. Ein Netz $\{x'_\alpha\}$ in $E'$ konvergiert schwach* gegen $x'$ genau dann, wenn $\langle x, x'_\alpha\rangle \to \langle x, x'\rangle$ gilt für jedes $x \in E$.

**Satz 2.3.15.** *In einem reflexiven Raum $E$ hat jede beschränkte Folge $\{x_n\}$ eine schwach konvergente Teilfolge.*

*Beweis.* Man kann $E = F := \overline{\mathrm{Lin}\{x_n | n \in \mathbb{N}\}}$ annehmen, denn wegen Hahn-Banach induzieren $E'$ und $F'$ die gleiche schwache Topologie auf $F$. Da $F$ separabel und wegen 2.3.13 reflexiv ist, ist nach 2.4.18 auch $F'$ separabel, es gibt also eine in $F'$ dichte Folge $\{\varphi_n\}$. Die Folge $\{\varphi_1(x_n\}$ ist beschränkt, hat also eine konvergente Teilfolge $\{\varphi_1(x_{1n})\}$. Die Folge $\{\varphi_2(x_{1n})\}$ hat eine konvergente Teilfolge $\{\varphi_2(x_{2n}\}$ u.s.w. Für die "Diagonalfolge´´ $\{x_{nn}\}$ ist dann $\{\varphi_k(x_{nn})\}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ konvergent. Sei nun $\varphi \in F'$ beliebig und $\varepsilon > 0$. Für geeignetes $k_0$ gilt $\|\varphi - \varphi_{k_0}\| < \varepsilon/3c$ wo $c = \sup_n \|x_n\|$, und es gibt $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|\varphi_{k_0}(x_{nn}) - \varphi_{k_0}(x_{mm})| < \frac{\varepsilon}{3}\ \forall n, m > n_0$, also $|\varphi(x_{nn}) - \varphi(x_{mm})| \leq |\varphi(x_{nn}) - \varphi_{k_0}(x_{nn})| + |\varphi_{k_0}(x_{nn}) - \varphi_{k_0}(x_{mm})| + |\varphi_{k_0}(x_{mm}) - \varphi(x_{mm})| < \frac{\varepsilon}{3c}\cdot c + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3c}\cdot c = \varepsilon$, d.h. $\{\varphi(x_{nn})\}$ ist eine Cauchyfolge in $\mathbb{K}$ und somit konvergent. Die Abbildung $\varphi \mapsto \lim \varphi(x_{nn}) = \lim(J_F x_{nn})(\varphi)$ ist nach Banach-Steinhaus ein Element $\ell \in F''$. Da $F$ reflexiv ist, gilt $\ell = J_F x$ für ein $x \in F$, also $\varphi(x_{nn}) \to \varphi(x)\ \forall\ \varphi \in F'$, d.h. die Teilfolge $\{x_{nn}\}$ von $\{x_n\}$ konvergiert schwach (gegen $x$). $\square$

*Da in reflexiven Räumen ($E$ identifiziert mit $JE = E''$) die schwache und die schwach*-Topologie übereinstimmen, ist der schwache Abschluss $K$ von $\{x_n|n \in \mathbb{N}\}$ im obigen Satz gemäßdem Satz von Alaoglu (s. unten) kompakt (was ohne Reflexivität meist falsch wäre). Außerdem ist $K$ mit der schwachen (= schwach*-) Topologie metrisierbar, wie sich aus dem folgenden Satz mit $F'$ (s. oben) anstelle von $E$ ergibt.*

**Satz 2.3.16.** *Sei $E$ ein separabler halbnormierter Raum und $K \subset E'$ schwach*-kompakt. Dann ist $K$ in der schwach*-Topologie metrisierbar.*

*Beweis.* Sei $\{x_1, x_2, ...\}$ eine dichte Teilmenge von $E$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n = J_E x_n$, also $f_n(x') = \langle x, x'\rangle$ für $x' \in E'$. Die $f_n$ sind schwach*-stetige Funktionen auf $E'$ und sie trennen Punkte von $E'$: Sind $x', y' \in E'$ mit $f_n(x') = f_n(y')\ \forall\ n \in \mathbb{N}$, so folgt wegen der Dichtheit der $f_n$ und der Normstetigkeit von $x'$ und $y'$, dass $\langle x, x'\rangle = \langle x, y'\rangle\ \forall\ x \in E$, also $x' = y'$ gilt. Die Metrisierbarkeit von $K$ folgt nun aus Proposition 1.6.33 $\square$

**Satz 2.3.17** (Satz von Alaoglu)**.** *Sei $E$ ein normierter Vektorraum. Die abgeschlossene Einheitskugel des Dualraums $S = \{x' \in E' | \|x'\| \leq 1\}$ ist schwach*-kompakt.*

*Beweis.* Für $x \in E$ sei $A_x = \{\lambda \in \mathbb{K}|\ |\lambda| \leq \|x\|\}$ und $A = \prod_{x\in E} A_x$. Nach dem *Satz von Tychonoff* ist $A$ (in der Topologie der koordinatenweisen Konvergenz) kompakt. Es gilt $S \subset A$, denn für $f \in S$ gilt $|f(x)| \leq \|x\|$, also $f(x) \in A_x$ für jedes $x \in E$. Die schwach*-Topologie stimmt auf $S$ mit der von $A$ induzierten Topologie überein. Also brauchen wir nur noch die Abgeschlossenheit von $S$ in

$A$ zu zeigen. Ist $\{f_\lambda\}$ ein Netz in $S$ mit $f_\lambda \to f$ in $A$, so ist $f$ wieder linear, und aus $|f_\lambda(x)| \leq \|x\|$ folgt $|f(x)| \leq \|x\|$, also $\|f\| \leq 1$, d.h. $f$ gehört zu $S$. □

## 2.4 Übungen, Beispiele, Ergänzungen

**Übung 2.4.1.** *Zwei Normen $\|\ \|_1$ und $\|\ \|_2$ auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum $E$ heißen äquivalent, wenn es Konstanten $\alpha, \beta > 0$ gibt mit*

$$\alpha\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta\|x\|_1$$

*für alle $x \in E$. Man zeige, dass Normen genau dann äquivalent sind, wenn sie dieselben Topologien erzeugen (vgl. jedoch Übung 1.6.17 (b).*

**Übung 2.4.2.** *Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Man zeige: Alle Normen im $\mathbb{K}^n$ sind äquivalent (Hinweis: Jede Norm $\|\ \|$ lässt sich durch $\|\ \|_1$ abschätzen, wobei für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$: $\|x\|_1 = \sum_1^n |x_i|$ ist. Die identische Abbildung*

$$id : (\mathbb{K}^n, \|\ \|_1) \to (\mathbb{K}^n, \|\ \|)$$

*ist also stetig. Verwende nun die Kompaktheit der Einheitssphäre $S = \{x \in \mathbb{K}^n \mid \|x\|_1 = 1\}$, um $\|\ \|_1$ durch $\|\ \|$ abzuschätzen).*

**Übung 2.4.3.** *Man zeige: Jeder endlich-dimensionale Teilraum eines normierten Raumes ist abgeschlossen.*

**Übung 2.4.4.** *Man zeige, dass ein unendlichdimensionaler Banachraum keine abzählbare Vektorraumbasis haben kann.*

**Übung 2.4.5.** *Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, $\|\ \|$ eine Norm auf $\mathbb{K}^n$ und $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ linear. Man zeige, dass $T$ stetig ist.*

**Übung 2.4.6.** *(a) Sei $E$ ein halbnormierter Raum über $\mathbb{K}$, $\varphi : E \to \mathbb{K}$ ein lineares Funktional. Man zeige:*

$$\varphi \text{ ist stetig } \Leftrightarrow \varphi^{-1}(0) \text{ ist abgeschlossen.}$$

*(b) Man gebe ein Beispiel, dass obige Aussage für beliebige lineare Abbildungen $T : E \to F$ nicht richtig ist.*

**Übung 2.4.7.** *Sei $E$ ein halbnormierter Raum, $F$ ein Unterraum von $E$ und sei $\varphi \in F'$. Nach Hahn-Banach lässt sich $\varphi$ zu einem stetigen linearen Funktional auf ganz $E$ fortsetzen. Man zeige:*

*(a) Diese Fortsetzung ist genau dann eindeutig bestimmt, wenn $F$ dicht in $E$ ist.*

*(b) Ist $\overline{F} \neq E$, so gibt es überabzählbar viele $\psi \in E'$, die $\varphi$ fortsetzen.*

**Übung 2.4.8.** *Die im Hahn-Banach-Satz 2.3.1 erhaltene Fortsetzung $\tilde{f}$ ist nicht nur wegen des Zornschen Lemmas keineswegs eindeutig bestimmt. Aber: Im Fall einer Halbnorm $p$ auf $E$ und einer in $(E, p)$ dicht liegenden Folge $\{x_n\}$ gebe man* *ein Verfahren an, so dass jeder, der ausgehend von $f$ diesem Verfahren folgt, dieselbe Fortsetzung $\tilde{f}$ erhält.*

**Bemerkung.** *Es lässt sich vermuten, dass der Satz von Hahn-Banach 2.3.1 wie das Lemma von Zorn und der Satz von Tychonov äquivalent zum Auswahlaxiom sein könnte.*

**Übung 2.4.9.** *Sei $E$ ein Vektorraum über $\mathbb{C}$ und seien $f_1$, $f_2$ reell lineare Funktionale von $E$ nach $\mathbb{R}$ und $f(z) := f_1(z) + if_2(z)$ für $z \in E$. Man zeige:*

*(a) $f$ ist $\mathbb{C}$-linear $\Leftrightarrow$ $f_2(x) = -f_1(ix)$ $\forall x \in E$.*

*(b) Ist $E$ halbnormiert und $f_1, f_2 \in E'$ (reeller Dualraum), $f = f_1 + if_2$ $\mathbb{C}$-linear, so gilt $\|f\| = \|f_1\|$.*

**Übung 2.4.10.** *Man gebe ein Beispiel, dass das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit nicht mehr gilt, wenn man den Ausgangsraum $E$ der Operatoren $T_\lambda : E \to F$ nicht mehr als vollständig voraussetzt.*

**Übung 2.4.11.** *Sind $U, V$ Unterräume eines normierten Raumes $(E, \|\ \|)$ mit der Eigenschaft, dass die Abbildung $(u, v) \mapsto u + v$ von $U \times V$ (mit der Norm $\|(u, v)\|_1 = \|u\| + \|v\|$) nach $E$ ein bistetiger Isomorphismus ist, so heißt $E$ die* **topologische direkte Summe** *von $U$ und $V$.*

*Man zeige: Ist ein Banachraum $E$ die direkte Summe zweier abgeschlossener Teilräume $U$ und $V$, so ist $E$ die topologische direkte Summe von $U$ und $V$.*

**Übung 2.4.12.** *Sei $E$ ein normierter Raum und $P : E \to E$ eine lineare Abbildung mit $P^2 = P$. Man nennt $P$ dann eine (lineare)* **Projektion**. *Im Folgenden wird $\mathrm{id}_E$ mit $I$ bezeichnet. Man zeige:*

*(a) $I - P$ ist eine Projektion mit $P(I - P) = (I - P)P = 0$ und $PE =$ Bild von $P =$ ker $(I - P)$ sowie $(I - P)E =$ Bild von $I - P =$ ker $P$.*

*(b) $E = PE \oplus (I - P)E$*

*(c) Ist $P$ stetig, also in $B(E)$, so sind Bild und Kern von $P$ abgeschlossen und es gilt eine Konstante $d > 0$ mit*

$$\|x\| \leq \|Px\| + \|(I - P)x\| \leq d\|x\| \ \forall x \in E,$$

*d.h. $E$ ist die topologische direkte Summe von Bild und Kern von $P$.*

*(d) Ist $E$ die topologische direkte Summe von abgeschlossenen Unterräumen $U$ und $V$, so definiert die Abbildung $x = u + v \mapsto u$ (bzw. $x = u + v \mapsto v$), wo $u \in U$, $v \in V$, eine (lineare) stetige Projektion $R$ (bzw. $S$) mit $S = I - R$.*

*(e) Ist $P \in B(E)$ eine Projektion $\neq 0$, so gilt $\|P\| \geq 1$.*

**Übung 2.4.13.** *Man gebe ein Beispiel einer unstetigen (linearen) Projektion auf einem Banachraum.*

**Übung 2.4.14.** *Auf $\ell^2$ ist eine Norm gesucht, bezüglich der $\ell^2$ vollständig ist, die aber zur üblichen Norm $\|(x_n)\|_2 = (\sum_n |x_n|^2)^{\frac{1}{2}}$ nicht äquivalent ist.*

**Übung 2.4.15.** *Sei $E$ der Raum $C^1([0, 1])$ der einmal stetig differenzierbaren komplexen Funktionen auf $[0, 1]$ aufgefasst als Unterraum von $C([0, 1])$ mit der*

*Norm* $\|f\|_\infty = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|$. *Die Ableitung* $f \mapsto f'$ *ist eine lineare Abbildung* $D : C^1([0,1]) \to C([0,1])$.

*(a) Man zeige, dass* $D$ *abgeschlossen ist.*

*(b) Ist* $D$ *stetig?*

**Übung 2.4.16.** *Sei* $c_0$ *der Raum der komplexen Nullfolgen mit der Supremumsnorm* $\|(x_n)\|_\infty = \sup_n |x_n|$. *Man zeige, dass* $c_0'$ *isometrisch isomorph zu* $\ell^1$ *ist.*

**Übung 2.4.17.** *Ein topologischer Raum* $X$ *heißt* **separabel**, *wenn es eine abzählbare dichte Teilmenge von* $X$ *gibt.* $X$ *erfüllt das* **2. Abzählbarkeitsaxiom** *(im Englischen:* $X$ *heißt "second countable"), wenn seine Topologie eine abzählbare Basis besitzt, d.h. wenn es offene Mengen* $O_i$, $i \in \mathbb{N}$, *gibt, so dass jede offene Menge von* $X$ *Vereinigung gewisser* $O_i$ *ist.*

*Man zeige:*

*(a) Aus dem 2. Abzählbarkeitsaxiom folgt die Separabilität von* $X$.

*(b) Ist* $X$ *ein halbnormierter Raum, gilt auch die Umkehrung von (a).*

**Übung 2.4.18.** *Sei* $E$ *ein halbnormierter Raum. Man zeige:* $E$ *ist genau dann separabel, wenn es eine abzählbare Menge* $A \subset E$ *mit* $\overline{\mathit{lin}\, A} = E$ *gibt (wobei* $\mathit{lin}\, A$ *das lineare Erzeugnis von* $A$ *bezeichnet).*

**Übung 2.4.19.** *Sei* $E$ *ein halbnormierter Raum.*

*(a) Man zeige: Ist der Dualraum* $E'$ *separabel, so auch* $E$.

*(Hinweis: Ist* $A \subset E'$ *abzählbar und dicht, wähle man zu jedem* $a \in A$ *ein* $x_a \in E$ *mit* $\|x_a\| = 1$ *und* $|a(x_a)| > \frac{1}{2}\|a\|$. *Wäre* $\mathit{lin}\{x_a | a \in A\}$ *nicht dicht in* $E$, *mit Hahn-Banach einen Widerspruch folgern).*

*(b) Man gebe ein Beispiel dafür, dass die Umkehrung von (a) falsch ist.*

**Übung 2.4.20.** *Man zeige, dass es keinen isometrischen Isomorphismus zwischen* $(\ell^\infty)'$ *und* $\ell^1$ *gibt. Insbesondere ist* $\ell^1$ *nicht reflexiv.*

**Übung 2.4.21.** *Ist* $\ell^\infty$ *reflexiv?*

**Übung 2.4.22.** *Man zeige, dass jeder endlichdimensionale normierte Raum reflexiv ist.*

**Übung 2.4.23.** *Ist* $N$ *ein Unterraum des halbnormierten Raumes* $E$, *so heißt* $N^0 = \{f \in E' | f(n) = 0 \text{ für alle } n \in N\}$ *der Annullator von* $N$ *in* $E'$. *Man zeige*

$$(E/N)' \;\cong\; N^0 \text{ und } N' \;\cong\; E'/N^0 \text{ (isometrische Isomorphie) .}$$

*(Hinweis: Für* $\varphi \in (E/N)'$ *die Abbildung* $\varphi \mapsto \varphi \circ p$ *betrachten, wo* $p$ *die kanonische Projektion von* $E$ *auf* $E/N$ *ist. Für* $\varphi \in E'$ *die Abbildung* $\varphi \mapsto \varphi|_N$ *betrachten.)*

**Übung 2.4.24.** *Sei* $E$ *ein halbnormierter Raum. Man zeige: Ist* $E'$ *separabel und* $B \subset E$ *eine beschränkte Teilmenge, so hat jedes* $x \in B$ *in der schwachen Topologie eine abzählbare Umgebungsbasis, d.h.* $B$ *erfüllt mit der schwachen Topologie das* **1. Abzählbarkeitsaxiom**.

**Übung 2.4.25.** *Der Raum $c_0$ der komplexen Nullfolgen ist ein Teilraum von $\ell^\infty$, also des Dualraumes von $\ell^1$. Man ermittle $({}^0c_0)^0$.*

**Übung 2.4.26.** *(Fastorthogonales Element) Sei $F$ ein linearer Teilraum des halbnormierten Raumes $E$ mit $\overline{F} \neq E$ und sei $\varepsilon > 0$. Man zeige, dass es ein $x \in E$ mit $\|x\| = 1$ gibt, für das $d(x,F) = \inf_{y\in F} \|x-y\| > 1-\varepsilon$ gilt.*

**Übung 2.4.27.** *Welche Inklusion besteht zwischen der schwachen und der schwach$*$-Topologie eines Dualraums?*

**Übung 2.4.28.** *Sei $E$ ein halbnormierter Raum, $E'$ sein Dualraum. Man zeige:*

*(a) Die abgeschlossene Einheitskugel von $E'$ ist schwach abgeschlossen und schwach$*$ abgeschlossen.*

*(b) Jeder abgeschlossene Unterraum von $E$ ist schwach abgeschlossen, aber nicht notwendig schwach$*$ abgeschlossen (Gegenbeispiel).*

*(c) Ein Unterraum von $E$ ist genau dann abgeschlossen, wenn er schwach abgeschlossen ist.*

**Übung 2.4.29.** *Man zeige, dass ein normierter Raum mit der schwachen Topologie und, falls es ein Dualraum ist, auch mit der schwach* Topologie ein topologischer Vektorraum ist, d.h. ein Vektorraum $E$ mit einer Topologie $\tau$, für welche die Skalarmultiplikation und die Addition als Abbildung von $\mathbb{K} \times E$ nach $E$ bzw. von $E \times E$ nach $E$ stetig ist.*

**Übung 2.4.30.** *Sei $(E,\tau)$ ein topologischer Vektorraum. Man zeige:*

*(a) Für $A, B, \subset E$ gilt $\overline{A} + \overline{B} \subset \overline{A+B}$.*

*(b) Für $A, B, \subset E$, $A$ offen, ist $A+B$ offen.*

*(c) Für $A \subset E$ mit $\mathring{A} \neq \varnothing$ enthält $A-A$ eine Nullumgebung.*

# Kapitel 3

# Hilberträume

## 3.1 Grundbegriffe

Sei $E$ ein Vektorraum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

**Definition 3.1.1.** *Ein* **Skalarprodukt** *auf $E$ ist eine Abbildung*

$$\begin{aligned}(\ |\ ) : E \times E &\to \mathbb{K}\\ (x,y) &\mapsto (x|y)\end{aligned}$$

*mit*
*(i) $(f|f) > 0$ für $f \neq 0$*
*(ii) $(\alpha f + \beta g|h) = \alpha(f|h) + \beta(g|h)$*
*(iii) $(f|g) = \overline{(g|f)}$*
*für alle $f, g, h \in H$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.*

**Bemerkung 3.1.2.** (a) Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist $(\quad|\quad)$ eine positive definite symmetrische Bilinearform, im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ eine positive definite hermitesche Sesquilinearform, denn aus (ii) und (iii) folgt

$$(h|\alpha f + \beta g) = \overline{\alpha}(h|f) + \overline{\beta}(h|g),$$

also Antilinearität (oder konjugiert - Linearität) im zweiten Argument.

(b) Aus (i) - (iii) folgt die **Cauchy-Schwarzsche Ungleichung**

$$|(f|g)|^2 \leq (f|f)(g|g) \qquad\qquad (CS).$$

wobei Gleichheit genau dann gilt, wenn $f$ und $g$ linear abhängig sind.

*Beweis.* Falls $g = 0$, ist die Behauptung erfüllt. Falls $g \neq 0$, gilt $0 \leq \big(f - \frac{(f|g)}{(g|g)}g | f - \frac{(f|g)}{(g|g)}g\big) = (f|f) - \frac{|(f|g)|^2}{(g|g)} - \frac{|(f|g)|^2}{(g|g)} + \frac{|(f|g)|^2}{(g|g)}$, also $|(f|g)|^2 \leq (f|f)(g|g)$. Gleichheit impliziert $f - \frac{(f|g)}{(g|g)}g = 0$, also lineare Abhängigkeit. Sind umgekehrt $f$ und $g$ linear abhängig, z.B. $f = \lambda g$, so folgt $|(f|g)| = |\lambda| \|g\|^2 = \|f\|\,\|g\|$. $\square$

(c) Durch $\|f\| := (f|f)^{1/2}$ wird auf $E$ eine Norm definiert. Die Dreiecksungleichung beweist man mit $(CS)$:

$$\begin{aligned}\|f+g\|^2 &= (f+g|f+g) \leq \|f\|^2 + 2|(f|g)| + \|g\|^2 \leq \|f\|^2 + 2\|f\|\,\|g\| + \|g\|^2 \\ &= (\|f\| + \|g\|)^2, \text{ also } \|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|.\end{aligned}$$

(d) (Polarisationsformel) Jedes Skalarprodukt kann auch durch seine zugehörige Norm ausgedrückt werden. Im reellen bzw. komplexen Fall gilt

$$(f|g) = \frac{1}{4}(\|f+g\|^2 - \|f-g\|^2) \tag{3.1.3}$$

bzw.

$$(f|g) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k \|f + i^k g\|^2 \tag{3.1.4}$$

oder ausführlich geschrieben

$$(f|g) = \frac{1}{4}(\|f+g\|^2 - \|f-g\|^2 + i\|f+ig\|^2 - i\|f-ig\|^2),$$

wie man leicht nachrechnet.

(e) Für die durch ein Skalarprodukt definierte Norm gilt die **Parallelogrammgleichung**

$$(P) \qquad \|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 \;=\; 2\|f\|^2 + 2\|g\|^2,$$

wie man leicht nachrechnet.

(f) Versieht man $E$ mit der unter (d) definierten Norm, so ist wegen $(CS)$ das Skalarprodukt eine stetige Funktion von $E \times E$ nach $\mathbb{K}$.

**Definition 3.1.5.** *Ein Vektorraum mit Skalarprodukt heißt* **Prähilbertraum.** *Ist er unter der vom Skalarprodukt herrührenden Norm vollständig, heißt er* **Hilbertraum**.

**Beispiele 3.1.6.** *(a) $\ell^2$ ist mit $(\{x_n\}|\{y_n\}) := \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$ ein Hilbertraum.*

*(b) $L^2([a,b])$ ist mit $(f|g) := \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$ ein Hilbertraum.*

**Satz 3.1.7** (Jordan-von Neumann)**.** *Sei $(E, \|\ \|)$ ein normierter Raum. Es gibt genau dann ein Skalarprodukt $(\ |\ )$ auf $E$ mit $\|x\| = (x|x)^{1/2}$ für $x \in E$, wenn die Norm $\|\ \|$ die Parallelogrammgleichung erfüllt.*

*Beweis.* Wegen Bemerkung $(e)$ oben ist nur noch die Implikation $\Leftarrow$ zu zeigen. Gelte also

$$(P) \qquad \|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2\|f\|^2 + 2\|g\|^2$$

für alle $f, g \in E$ und sei $(f|g)$ durch die Polarisationsformel 3.1.3 bzw. 3.1.4 definiert, woraus sich direkt Folgendes ergibt:

(a) $\|x\|^2 = (x|x)$ (im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ wegen $|1+i| = |1-i|$), $(x|y) = (y|x)$ bzw. $(x|y) = \overline{(y|x)}$ im reellen bzw. komplexen Fall, $(0|y) = 0$, $(-x|y) = -(x|y)$, $(ix|y) = i(x|y)$ (falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

(b) Wir betrachten zunächst den reellen Fall und zeigen Additivität im ersten Argument von $(\ |\ )$. Nach Definition von $(\ |\ )$ (s. oben) gilt

$$\begin{aligned}4((x|z) + (y|z)) &= \|x+z\|^2 - \|x-z\|^2 + \|y+z\|^2 - \|y-z\|^2 \\ &= \|x+z\|^2 + \|y\|^2 - \|x-z\|^2 - \|y\|^2 + \|y+z\|^2 + \|x\|^2 - \|y-z\|^2 - \|x\|^2 \\ &\overset{(P)}{=} \frac{1}{2}(\|x+y+z\|^2 + \|x-y+z\|^2 - \|x+y-z\|^2 - \|x-y-z\|^2 \\ &\quad + \|x+y+z\|^2 + \|-x+y+z\|^2 - \|x+y-z\|^2 - \|-x+y-z\|^2) \\ &= \|x+y+z\|^2 - \|x+y-z\|^2 = 4(x+y|z).\end{aligned} \tag{3.1.8}$$

(c) Aus der Additivität folgt sogleich $(2x|z) = 2(x|z)$ und per Induktion $(nx|z) = n(x|z)$ für $n \in \mathbb{N}$, wegen $(x|z) = (m \cdot \frac{1}{m}x|z) = m(\frac{1}{m}x|z)$ auch $(\frac{1}{m}x|z) = \frac{1}{m}(x|z)$, somit auch $(\lambda x|z) = \lambda(x|z)$ für positive $\lambda \in \mathbb{Q}$, und wegen (a) für alle $\lambda \in \mathbb{Q}$. Da auf $\mathbb{R}$ die Abbildungen $\lambda \mapsto \lambda(x|z)$ und $\lambda \mapsto (\lambda x|z)$ beide stetig sind und auf $\mathbb{Q}$ übereinstimmen, stimmen sie ganz überein: $\lambda(x|z) = (\lambda x|z)$ für $\lambda \in \mathbb{R}$. Gemäß(a) gilt auch $(x|x) = \|x\|^2 > 0$ für $x \neq 0$ und $(x|y) = (y|x)$ für $x, y \in E$, d.h. $(\ |\ )$ ist ein Skalarprodukt auf $E$ mit $(x|x)^{1/2} = \|x\|$.

(d) Der Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Das durch die Polarisationsformel 3.1.4 definierte $(x|y)$ trennt man in Real- und Imaginärteil. Die Abschnitte (b) und (c) gelten auch für den Realteil, d.h. dieser ist im ersten Argument additiv und homogen für reelle Skalare. Der entsprechende Beweis für den Imaginärteil ist identisch, nur steht in den quadratischen Normausdrücken $iz$ statt $z$. Somit ist insgesamt $(x|y)$ im ersten Argument additiv und homogen für reelle Skalare. Dies zusammen mit (a) zeigt, daß $(\ |\ )$ ein Skalarprodukt mit $(x|x)^{1/2} = \|x\|$ ist. □

**Korollar 3.1.9.** *Ein normierter Raum ist genau dann ein Praehilbertraum, wenn jeder 2-dimensionale Unterraum ein Praehilbertraum ist.*

## 3.2 Konvexität und Orthogonalität

**Definition 3.2.1.** *Ist $E$ ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, so heißt eine Teilmenge $K \subset E$* **konvex**, *wenn gilt: $x, y \in K$, $0 < \alpha < 1 \Rightarrow \alpha x + (1-\alpha)y \in K$.*

**Satz 3.2.2.** *Sei $G$ ein Prä-Hilbertraum, $K \subset G$ eine nichtleere vollständige konvexe Teilmenge. Dann gibt es zu jedem $x \in G$ genau ein $y \in K$ mit*

$$\|x - y\| = \inf_{z \in K} \|x - z\|.$$

*Man bezeichnet dieses eindeutig bestimmte $y$ als Projektion von $x$ auf $K$ und schreibt $y = P_K x$.*

*Beweis.* Sei $\{y_n\}$ eine Folge in $K$ mit $\|x-y_n\| \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \inf_{z\in K}\|x-z\| = c$. Wir zeigen, daß $\{y_n\}$ eine Cauchyfolge ist, unter Benutzung der Parallelogrammgleichung und der Tatsache, daß $\frac{1}{2}(y_n+y_m)$ wegen der Konvexität von $K$ wieder in $K$ liegt. Mit $z_n = x - y_n$ erhalten wir aus der Parallelogrammgleichung $\|z_n - z_m\|^2 + \|z_n + z_m\|^2 = 2\|z_n\|^2 + 2\|z_m\|^2$ die Gleichung $\|y_m - y_n\|^2 = 2\|x-y_n\|^2 + 2\|x-y_m\|^2 - \|2(x - \frac{1}{2}(y_n+y_m))\|^2$. Da der letzte Term dieser Gleichung $\leq -4c^2$ ist und $\|x-y_n\| \to c$ gilt, folgt $\|y_m - y_n\|^2 \to 0$ für $m,n\to\infty$, d.h. $\{y_n\}$ ist eine Cauchy-Folge. Da $K$ vollständig ist, konvergiert $\{y_n\}$ gegen ein $y \in K$. Es gilt (wegen der Stetigkeit der Norm) $\|x-y\| = \lim \|x-y_n\| = \inf_{z\in K}\|x-z\|$. Ist $y' \in K$ mit derselben Eigenschaft gegeben, so folgt aus obigem, daß $(y, y', y, y', ...)$ eine Cauchyfolge ist, also $y = y'$. □

**Definition 3.2.3.** *Sei $G$ ein Prähilbertraum. Man nennt Elemente $x$ und $y$ aus $G$* **orthogonal** *($x \perp y$), wenn $(x|y) = 0$ gilt. Teilmengen $A, B, \subset G$ heißen orthogonal ($A \perp B$), wenn $(a|b) = 0$ gilt für alle $a \in A$, $b \in B$. Ist $A \subset G$, so heißt $A^\perp = \{x \in G \mid x \perp A\}$ das* **orthogonale Komplement** *von $A$.*

**Bemerkung 3.2.4.** (a) Sind $x_1, ..., x_n \in G$ paarweise orthogonal, *so gilt* $\|x_1 + ... + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + ... + \|x_n\|^2$ *(***"Satz des Pythagoras"***).*

(b) $A^\perp$ ist stets ein abgeschlossener Teilraum von $G$.

**Satz 3.2.5 (Orthogonale Zerlegung).** *Ist $M$ ein vollständiger Teilraum des Prähilbertraumes $G$, so gilt $G = M \oplus M^\perp$.*

*Beweis.* Sei $x \in G$, $y = P_M x$ (siehe Satz 3.2.2). Aus $\|x-y\| \leq \|x-m\|$ für alle $m \in M$ leitet man $(x-y) \perp M$ her: Wäre $m \in M$ mit $\|m\| = 1$ und $(x-y|m) = \alpha \neq 0$, so wäre $x - y - \alpha m$ orthogonal zu $m$, also nach Pythagoras $\|x-y-\alpha m\|^2 + \|\alpha m\|^2 = \|x-y\|^2$, d.h. für $m' = y + \alpha m \in M$ gälte $\|x-m'\| < \|x-y\|$, was nicht sein kann. Somit ist $x-y$ orthogonal zu $M$. Also gilt $x = y + (x-y) \in M + M^\perp$ und somit $G = M + M^\perp$. Ist $x \in M \cap M^\perp$ so gilt $(x|x) = 0$, also $x = 0$, folglich ist die Summe direkt: $G = M \oplus M^\perp$. □

**Bemerkung und Definition 3.2.6.** Für $m^\perp \in M^\perp$ liefert die soeben bewiesene Zerlegung $m^\perp = P_M m^\perp + (m^\perp - P_M m^\perp)$. Da ebenso $m^\perp = 0 + m^\perp$ gilt, folgt aus der Eindeutigkeit der Zerlegung $P_M m^\perp = 0$, also $P_M = 0$ auf $M^\perp$. Auf $M$ gilt $P_M = id_M$. Offenbar gilt $P_M \in B(G)$ und $\|P_M\| = 1$. Man nennt $P_M$ die **orthogonale Projektion auf M**.

## 3.3 Orthonormalbasen

### Orthonormalsysteme

**Definition 3.3.1.** *Ist $G$ ein Prähilbertraum, so heißt $A \subset G$ ein* **orthonomales System** *(ONS), wenn $(a|b) = \delta_{ab}$ gilt für alle $a, b \in A$.*

**Bemerkung 3.3.2.** (a) Ist $A \subset G$ ein endliches ONS, so folgt aus $0 \leq \|x - \sum_{a\in A}(x|a)a\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{a\in A}|(x|a)|^2 - \sum_{a\in A}|(x|a)|^2 + \sum_{a\in A}|(x|a)|^2 = \|x\|^2 -$

$\sum_{a\in A}|(x|a)|^2$ die **Besselsche Ungleichung:**

$$\sum_{a\in A}|(x|a)|^2 \;\le\; \|x\|^2 \;\text{ für alle } x\in G.$$

Hieraus folgt, daß bei beliebigem ONS $A$ für jedes $x$ höchstens abzählbar viele $a\in A$ mit $(x|a)\neq 0$ existieren. Die Besselsche Ungleichung gilt auch für unendliche ONS $A$, wenn wir die Summe links als Supremum über die endlichen Teilsummen definieren oder, was dasselbe ist, als $\sum_{n=1}^{\infty}|(x|a_n)|^2$ wobei $a_n$ die $a\in A$ mit $(x|a)\neq 0$ in irgendeiner Reihenfolge durchläuft.

(b) Für jedes endliche ONS $A$ gilt

$$\Big(x-\sum_{a\in A}(x|a)a\Big)\perp A \qquad \text{für alle } x\in G.$$

*Beweis.* Für jedes $b\in A$ gilt

$$(x-\sum_{a\in A}(x|a)a|b)=(x|b)-(x|b)(b|b)=0$$

□

(c) Ist $A=\{a_1,...,a_n\}$ ein endliches ONS und sind $\lambda_1,...,\lambda_n\in\mathbb{K}$, so gilt für jedes $x\in G$

$$\|x-\sum_{1}^{n}\lambda_i a_i\|\ge\|x-\sum_{1}^{n}(x|a_i)a_i\|,$$

d.h. $\sum_1^n(x|a_i)a_i$ liefert die beste Approximation von $x$ innerhalb von Lin.

*Beweis.* $x-\sum\lambda_i a_i=[x-\sum(x|a_i)a_i]-[\sum(\lambda_i-(x|a_i))a_i]$ und nach (b) oben sind die beiden Terme in eckigen Klammern zueinander orthogonal. Mit "Pythagoras" (s.o.) erhalten wir $\|x-\sum\lambda_i a_i\|^2=\|x-\sum(x|a_i)a_i\|^2+\|\sum(\lambda_i-(x|a_i)a_i\|^2\ge \|x-\sum(x|a_i)a_i\|^2$. □

(d) Ist $A$ ein ONS in $G$ und $\{\lambda_a\}\in\ell^2(A)$, d.h. gilt $\lambda_a\in\mathbb{K}$ für jedes $a\in A$, $\lambda_a\neq 0$ für höchstens abzählbar viele $a_n(n\in\mathbb{N})$ und $\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_{a_n}|^2<\infty$, so ist $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_{a_n}a_n$ eine Cauchy-Reihe. Konvergiert diese Reihe, so konvergiert auch jede Umordnung davon und hat denselben Grenzwert (folgt leicht aus der Orthogonalität der Reihenglieder). Man bezeichnet dann den Grenzwert mit $\sum_{a\in A}\lambda_a a$. Ist $x$ dieser Grenzwert, so gilt $\lambda_a=(x|a)$ für jedes $a\in A$.

## Orthonormalbasen

**Satz 3.3.3.** *Sei $G$ ein Prähilbertraum, $A$ ein ONS in $G$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

*(i) $A$ ist total in $G$, d.h. das lineare Erzeugnis von $A$ ist dicht in $G$.*

*(ii) $x=\sum_{a\in A}(x|a)a$ für alle $x\in G$.*

*(iii) $(x|y)=\sum_{a\in A}(x|a)\overline{(y|a)}$ für alle $x,y,\in G$*

*(iv)* $\|x\|^2 = \sum_{a\in A} |(x|a)|^2$ *für alle* $x \in G$ **(Parsevalsche Gleichung)**.
*Ist* $G$ *vollständig, so sind auch folgende (schwächere) Aussagen zu den vorigen äquivalent:*

*(v)* $x \perp A \Rightarrow x \Rightarrow 0$.

*(vi)* $A$ *ist ein maximales ONS in* $G$

*Beweis.* (i) $\Rightarrow$ (ii): Gelte (i) und sei $x \in G$. Es gibt $x_n \in \mathrm{Lin}A$ mit $x_n \to x$. Ist $x_n = \sum_{k=1}^{k_n} \lambda_k^{(n)} a_k^{(n)}$ mit $\lambda_k^{(n)} \in \mathbb{K}$ und $a_k^{(n)} \in A$, so können wir $\{a_k^{(n)} | 1 \leq k \leq k_n\} \subset \{a_k^{(n+1)} | 1 \leq k \leq k_{n+1}\}$ für alle $n$ annehmen, denn eine Linearkombination ändert sich nicht, wenn man weitere Vektoren mit dem Faktor Null hinzuaddiert. Also lassen sich die $x_n$ in der Form $x_n = \sum_{k=1}^{k_n} \lambda_k^{(n)} a_k$ mit von $n$ unabhängigen $a_k \in A$ darstellen. Nach Bemerkung 3.3.2 (c) gilt $\|x - \sum_1^{k_n} (x|a_k)a_k\|^2 \leq \|x - x_n\|^2 \to 0$, woraus $x = \sum_1^{\infty} (x|a_k)a_k$ folgt.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): folgt aus der Tatsache, daß $A$ ein ONS und das Skalarprodukt stetig ist.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): ist klar.

(iv) $\Rightarrow$ (i): folgt aus Bemerkung 3.3.2 (a): für endliches $B \subset A$ gilt

$$\|x - \sum_{a\in B} (x|a)a\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{a\in B} |(x|a)|^2.$$

Durchläuft $\{a_n\}$ diejenigen $a \in A$ mit $(x|a) \neq 0$ und setzen wir $B = \{a_1, ..., a_n\}$, so geht die rechte Seite obiger Gleichung nach Voraussetzung mit $n \to \infty$ gegen 0, also auch die linke. Somit ist $\mathrm{Lin}A$ dicht in G.

(v) $\Leftrightarrow$ (vi): ist klar (da die Negationen beider Bedingungen äquivalent sind).

(i) $\Rightarrow$ (v): $x \perp A \Rightarrow x \perp x$ (wegen (i) und Stetigkeit des Skalarprodukts) $\Rightarrow x = 0$.

Sei $G$ nun vollständig.

$(v) \Rightarrow$ (i) (Beweis durch Kontraposition): Sei $A$ nicht total, also $M = \overline{\mathrm{Lin}A} \neq G$. Nach dem Satz 3.2.5 gilt $G = M \oplus M^{\perp}$. Es gibt also ein $x \neq 0 \in M^{\perp}$. Wegen $A \subset M$ folgt $x \perp A$, was die Negation von (v) ist. □

**Definition 3.3.4.** *Ein ONS in einem Hilbertraum heißt* **Orthonormalbasis***(ONB), wenn es eine der äquivalenten Bedingungen (i) - (vi) des vorigen Satzes erfüllt.*

**Bemerkung.** Ist $H$ ein Hilbertraum, $A$ eine (ONB) in $H$, so folgt aus (iv) von Satz 3.3.2, daß die Abbildung $x \mapsto \{(x|a)\}_{a\in A}$ linear und isometrisch von $H$ nach $\ell^2(A)$ ist, wenn man in $\ell^2(A)$ die Norm analog wie in $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{N})$ definiert. Aus Bemerkung 3.3.2 (d) folgt, daß diese Abbildung surjektiv ist. Also gilt $H \cong \ell^2(A)$ (isometrische Isomorphie).

**Satz 3.3.5.** *Ist* $G$ *ein Prähilbertraum und sind* $A, B$ *maximale ONS, so haben* $A$ *und* $B$ *gleiche Mächtigkeit.*

*Beweis.* Ist $A$ endlich, so gilt $\#B \leq \#A$ (man benutzt, daß orthogonale Vektoren linear unabhängig sind). Ist $A$ unendlich, so betrachte man für $x \in A$

die Menge $B(x) = \{y \in B \mid (y|x) \neq 0\}$. Wegen der Besselschen Ungleichung ist $B(x)$ höchstens abzählbar. Es gilt $B = \bigcup B(x)$, also $\#B \leq \aleph_0 \cdot \#A = \#A$ (da $\#A$ eine unendliche Kardinalzahl ist). Wir haben somit $\#B \leq \#A$ gezeigt. Vertauschung von $A$ und $B$ führt zu $\#A \leq \#B$, also $\#A = \#B$. □

**Definition 3.3.6.** *Die* **Hilbertdimension** *eines Prähilbertraums $G$ ist die Kardinalzahl eines maximalen ONS in $G$.*

**Vorsicht:** Im unendlich-dimensionalen Fall kann diese Dimension kleiner sein als die Vektorraumdimension (Kardinalität einer Hamel-Basis), muss es aber nicht. Vgl. 3.5.28.

**Bemerkung.**

(a) Ist $B \subset G$ ein ONS, so gibt es nach dem Lemma von Zorn ein maximales ONS $A$ mit $A \supset B$. Insbesondere lässt sich jedes ONS im Hilbertraum zu einer ONB ergänzen.

(b) Ist $G$ ein separabler Prähilbertraum, so kann man sich ohne Benutzung des Zornschen Lemmas ein maximales ONS verschaffen, denn es gilt: Ist $\{a_n\}$ eine Folge linear unabhängiger Vektoren in $G$, so gibt es eine orthonormale Folge $\{b_n\}$ mit $\mathrm{Lin}\{a_1, ..., a_n\} = \mathrm{Lin}\{b_1, ..., b_n\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, wobei "Lin" das lineare Erzeugnis bedeutet. (Gram-Schmidtsches Orthonormalisierungsverfahren: Sei $b_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|}$. Sind $b_1, \ldots, b_n$ schon konstruiert, so sei $b'_{n+1} = a_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} (a_{n+1}|b_i) b_i$ und $b_{n+1} = \frac{b'_{n+1}}{\|b'_{n+1}\|}$).

**Beispiel 3.3.7.** *In $L^2([0,1])$ ist $A = \{e^{2\pi i n t} | n \in \mathbb{Z}\}$ eine ONB.*

*Beweis.* Man verifiziert unmittelbar, daß $A$ ein ONS ist. Daß $A$ total in $L^2([0,1])$ ist, zeigt man mit dem Weierstraßschen Approximationssatz. □

**Proposition 3.3.8** (Orthogonale Zerlegung)**.** *Ist $M$ ein abgeschlossener Unterraum eines Hilbertraumes $H$, so gilt $H = M \oplus M^\perp$.*

Dies ist eine schwächere Fassung von 3.2.5.

Ein anderer Beweis: Sei $B$ eine ONB von $M$, $A$ eine ONB von $H$, die $B$ enthält. Für $x \in H$ gilt:

$$x = \sum_{a \in A} (x|a) a = \sum_{b \in B} (x|b) b + \sum_{a \in A \setminus B} (x|a) a \in M + M^\perp.$$

**Korollar 3.3.9.** *Ist $M$ ein abgeschlossener Unterraum eines Hilbertraumes $H$, so gilt $M = (M^\perp)^\perp =: M^{\perp\perp}$.*

## 3.4 Operatoren auf Hilberträumen

### Darstellungssatz von Riesz

**Satz 3.4.1** (Riesz I)**.** *Ist $H$ ein Hilbertraum und $f \in H'$, so gibt es genau ein $x \in H$ mit $f(y) = (y|x)$ für alle $y \in H$. Die Zuordnung $f \leftrightarrow x$ definiert einen isometrischen Anti-Isomorphismus (antilinear und bijektiv) zwischen $H'$ und $H$.*

*Beweis.* Jedes $z \in H$ definiert ein Funktional $\varphi_z \in H'$ durch $\varphi_z(x) = (x|z)$. Wegen $|(x|z)| \leq \|x\|\|z\|$ gilt $\|\varphi_z\| \leq \|z\|$, wegen $|(z|z)| = \|z\|^2$ gilt $\|\varphi_z\| = \|z\|$. Somit ist die Abbildung $\Phi : z \mapsto \varphi_z$ von $H$ nach $H'$ isometrisch, außerdem wegen $\alpha\varphi_z = \varphi_{\overline{\alpha}z}$ antilinear. Ein $f \in H'$ ist durch seinen Kern (der Kodimension 1 hat) und den Wert an einem beliebigen Punkt außerhalb $ker f$ eindeutig bestimmt. Ist $x \in (ker f)^\perp$ mit $\|x\| = 1$ und $f(x) = \alpha$, so folgt wegen $\alpha = \alpha(x|x) = (x|\overline{\alpha}x)$, daß $f = \varphi_{\overline{\alpha}x}$, denn beide Funktionale haben gleichen Kern und gleichen Wert bei x. Somit ist $\Phi$ surjektiv, also ein isometrischer Antiisomorphismus von $H$ auf $H'$. □

## Adjungierte Operatoren

**Definition 3.4.2.** *Ist $H$ ein Hilbertraum und $T \in B(H)$, so heißt ein Operator $T^* \in B(H)$ zu $T$* **adjungiert**, *wenn für alle $x, y \in H$ gilt:*

$$(Tx|y) = (x|T^*y).$$

*Ist $T$ zu sich selbst adjungiert, so heißt $T$* **selbstadjungiert** *oder auch* **hermitesch**.

**Satz 3.4.3 (Riesz II).** *Sei $H$ ein Hilbertraum über $\mathbb{K}$ und $\langle\ ,\ \rangle : H \times H \to \mathbb{K}$ linear im ersten, antilinear im zweiten Argument und außerdem stetig: $|\langle x, y\rangle| \leq C\|x\|\ \|y\|$ für alle $x, y \in H$. Dann gibt es genau ein $A \in B(H)$ mit $\|A\| \leq C$ und $\langle x, y\rangle = (x|Ay)$. Gilt $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$, so ist $A$ hermitesch: $A = A^*$.*

*Beweis.* Für festes $y$ ist $x \mapsto \langle x, y\rangle$ aus $H'$. Es gibt nach dem vorigen Satz also genau ein $y' =: Ay$ mit $\langle x, y\rangle = (x|Ay)$. Die Abbildung $A : y \mapsto Ay$ ist linear und $\|Ay\| = \sup_{\|x\|\leq 1} |(x|Ay)| = \sup_{\|x\|\leq 1} |\langle x, y\rangle| \leq C\|y\|$, also $\|A\| \leq C$. Aus $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$ folgt $(x|Ay) = \overline{(y|Ax)} = (Ax|y)$, also $A = A^*$. □

**Korollar 3.4.4.** *Zu jedem $T \in B(H)$ gibt es genau einen adjungierten Operator.*

*Beweis.* Betrachte $\langle x, y\rangle = (Tx|y)$ und wende den letzten Satz an: es gibt genau ein $A \in B(H)$ mit $(Tx|y) = \langle x, y\rangle = (x|Ay)$, also $A = T^*$. □

**Übung.** Für $R, S \in B(H)$ gilt $(S^*)^* = S$, $(RS)^* = R^*S^*$, $(R+S)^* = R^* + S^*$, $(\lambda S)^* = \overline{\lambda} S^*\ \forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\|S^*\| = \|S\|$, $\|S^*S\| = \|SS^*\| = \|S\|^2$ sowie ker $S^* = (SH)^\perp$, ker $S = (S^*H)^\perp$.

Neben den schon definierten selbstadjungierten Operatoren seien zwei weitere mit der Adjunktion * definierte Klassen von Operatoren im Hilbertraum erwähnt:

**Definition 3.4.5.** *Ein Operator $T \in B(H)$ heißt* **normal**, *wenn $TT^* = T^*T$ gilt. $T$ heißt* **unitär**, *wenn $TT^* = T^*T = id_H$ gilt.*

Offenbar sind hermitesche (= selbstadjungierte) Operatoren und unitäre Operatoren normal.

## Satz von Lax-Milgram

**Satz 3.4.6 (Lax-Milgram).** *Sei $H$ ein Hilbertraum über $\mathbb{K}$ und $\langle\ ,\ \rangle : H \times H \to \mathbb{K}$ linear im ersten, antilinear im zweiten Argument. Es gebe Konstanten $C$ und $C'$, so daß $|\langle x,y\rangle| \leq C\|x\|\ \|y\|$ und $|\langle x,x\rangle| \geq C'\|x\|^2$ für alle $x,y,\in H$. Dann ist der wie im letzten Satz (Riesz II) definierte Operator $A$ invertierbar (d.h. $\exists A^{-1} \in B(H)$ mit $AA^{-1} = A^{-1}A = id_H$) und es gilt $\|A^{-1}\| \leq \frac{1}{C'}$.*

*Beweis.* Sei $A$ wie im Satz 3.4.3. Es gilt

$$C'\|x\|^2 \leq |\langle x,x\rangle| = |(x|Ax)| \leq \|x\|\ \|Ax\|,$$

also $C'\|x\| \leq \|Ax\|$. Deshalb ist $A$ ein bi-stetiger Isomorphismus von $H$ auf $AH$. Insbesondere ist $AH$ abgeschlossen in $H$. Es gilt $AH = H$, denn aus $x \perp AH$ folgt insbesondere $0 = (x|Ax) = \langle x,x\rangle \geq C'\|x\|^2$, also $x = 0$. Somit ist $A$ invertierbar, und wegen $\|x\| \leq \frac{1}{C'}\|Ax\|$ folgt $\|A^{-1}\| \leq \frac{1}{C'}$ (setze $x = A^{-1}y$). $\square$

**Eine Anwendung der Sätze von Riesz und Lax-Milgram.**
Existenz schwacher Lösungen für gewisse Differentialgleichungen.

**Vorbereitung (Sobolevraum $H_2^1$ auf $[0,1]$).** Sei $I = [0,1]$ und sei $H_2^1$ der Raum der $f \in \mathcal{C}(I)$, deren Ableitung $f'$ fast überall existiert und in $L^2(I)$ liegt sowie $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt$ erfüllt. Anders gesagt: Sei $H_2^1 = \{f \in \mathcal{C}(I) \mid \exists u \in L^2(I) \text{ mit } f(x) = f(0) + \int_0^x u(t)dt\ \forall\ x \in I\}$, wobei wir für $u$ dann $f'$ schreiben. Bezeichnet $(\ |\ )$ das Skalarprodukt in $L^2(I)$, so wird durch $(f|g)^1 = (f|g) + (f'|g')$ ein Skalarprodukt auf $H_2^1$ definiert. Die zugehörige Norm ist $\|f\|_2^1 = (\|f\|_2^2 + \|f'\|_2^2)^{1/2}$, und $H_2^1$ ist damit, wie leicht zu sehen, vollständig, also ein Hilbertraum. Der Unterraum $\underset{\circ}{H_2^1} = \{f \in H_2^1 | f(0) = f(1) = 0\}$ ist abgeschlossen. Diesen Raum (Sobolevraum) werden wir benutzen. **Problemstellung.** Wir betrachten die Sturm-Liouville-Differentialgleichung $Lu = f$, wo $Lu = -(pu')' + qu$, $p \in \mathcal{C}^1(I), q \in \mathcal{C}(I)$. Das zugehörige Randwertproblem lautet: bei gegebenem $f \in \mathcal{C}(I)$ finde man $u \in \mathcal{C}^2(I)$ mit $Lu = f$ und $u(0) = u(1) = 0$. Damit $u$ eine Lösung ist, genügt es (und ist notwendig), daß $\int_0^1 v\overline{Lu} = \int_0^1 v\bar{f}$ für alle $v \in \mathcal{C}^1(I)$ mit $v(0) = v(1) = 0$ gilt. Den Raum dieser Funktionen nennen wir $\mathcal{C}_0^1(I)$. Mit partieller Integration ergibt sich $\int_0^1 v\overline{Lu} = \int_0^1 v(-\overline{(pu')'} + \overline{qu}) = \int_0^1 (v'\overline{pu'} + v\overline{qu}) =: \langle v,u\rangle$. Eine Funktion $u \in \underset{\circ}{H_2^1}$ heißt schwache Lösung (da nur "schwach" differenzierbar), wenn $\langle v,u\rangle = \int v\bar{f}$ für alle $v \in \mathcal{C}_0^1$ gilt.

**Satz 3.4.7.** *Seien $p,q$ und $\langle v,u\rangle$ wie oben und Re $p$, Re $q \geq c > 0$ auf $I$. Dann gilt:*

*Zu $f \in L^1(I)$ gibt es genau eine schwache Lösung in $H_2^1$*

*Beweis.* Für $u,v \in H_2^1$ gilt

$$\begin{aligned}
|\langle v,u\rangle| &\leq \int_0^1 |v'\overline{pu'}| + \int_0^1 |v\overline{qu}| \leq \|p\|_\infty\ \|v'\|_2\ \|u'\|_2 + \|q\|_\infty \|v\|_2 \|u\|_2 \\
&\leq \max\{\|p\|_\infty, \|q\|_\infty\} \cdot (\|v'\|_2^2 + \|v\|_2^2)^{1/2} (\|u'\|_2^2 + \|u\|_2^2)^{1/2} \\
&= \text{const}\|v\|_2^1 \|u\|_2^1.
\end{aligned}$$

Außerdem gilt

$$|\langle u, u\rangle| \geq |\mathrm{Re}\langle u, u\rangle| \geq \int_0^1 (|u'|^2 c + |u|^2 c) = c(\|u\|_2^1)^2.$$

Somit ist der Satz von Lax-Milgram anwendbar: $\langle v, u\rangle = (v|Au)$ mit einem (eindeutig bestimmten) invertierbaren $A \in B(H)$.

Für $f \in L^1(I)$ sei die Linearform $F$: $H_2^1 \to \mathbb{C}$ definiert durch $F(v) = \int_0^1 v\bar{f}$. Es gilt

$$\begin{aligned} |F(v)| \leq \|v\|_\infty \|f\|_1 &= \|f\|_1 \sup_{x\in I} |\int_0^x v'(t)dt| \leq \|f\|_1 \|\chi_I\|_2 \|v'\|_2 \\ &\leq \|f\|_1 \|v\|_2^1, \end{aligned}$$

also $F \in (H_2^1)'$. Nach dem Satz von Riesz gibt es genau ein $w \in H_2^1$ mit $F(v) = (v|w)^1$. Ein $u \in H_2^1$ ist genau dann eine schwache Lösung, wenn $(v|Au) = (v|w)$ für alle $v \in \mathcal{C}_0^1(I)$ gilt. Dies ist gleichbedeutend mit $Au = w$, da, wie man leicht sieht, $\mathcal{C}_0^1(I)$ dicht in $H_2^1$ ist. Somit ist $u = A^{-1}w$ die eindeutig bestimmte schwache Lösung des Randwertproblems. □

## 3.5 Übungen, Beispiele, Ergänzungen

**Übung 3.5.1.** *Man zeige: Ist $G$ ein Prähilbertraum, so ist seine Vervollständigung $\hat{G}$ ein Hilbertraum.*

**Übung 3.5.2.** *Man zeige: Sind $F$ und $G$ Prähilberträume, so ist eine lineare Abbildung $T : F \mapsto G$ genau dann isometrisch, wenn sie das Skalarprodukt erhält: $(Tf_1|Tf_2) = (f_1|f_2)$ für alle $f_1, f_2 \in F$.*

**Übung 3.5.3.** *Man zeige: Ein Hilbertraum ist genau dann separabel, wenn seine Dimension, d.h. die Kardinalzahl einer Orthonormalbasis endlich oder abzählbar unendlich ist.*

**Übung 3.5.4.** *Beim Satz von Hahn-Banach und beim Satz von der Existenz einer Orthonormalbasis im Hilbertraum haben wir das Zornsche Lemma, also das Auswahlaxiom, benutzt. Man zeige: Wenn man sich auf separable Räume beschränkt, lassen sich die eben erwähnten Sätze auch ohne das Zornsche Lemma beweisen.*

**Übung 3.5.5.** *Man zeige: Jeder Hilbertraum ist reflexiv.*

**Korollar 3.5.6.** *Jede beschränkte Folge in einem Hilbertraum hat eine schwach konvergente Teilfolge (siehe Satz 2.3.15).*

**Übung 3.5.7.** *Sei $H$ ein komplexer Hilbertraum. Man zeige, daß es auf $H$ eine* **Konjugation** *gibt, d.h. eine antilineare isometrische Abbildung $j$ von $H$ in sich mit $j^2 = id_H$.*

**Übung 3.5.8.** *Seien $F$ und $G$ Prähilberträume und $T : F \to G$ antilinear und isometrisch. Man zeige, daß für alle $u, v \in F$ die Gleichung $(Tu|Tv) = (v|u)$ gilt.*

**Übung 3.5.9.** *Man zeige durch ein Beispiel, daß ein maximales Orthonormalsystem in einem Prähilbertraum nicht notwendig total ist. (Hinweis: Ausgehend von einem Hilbertraum samt Orthonormalbasis betrachte man den Kern eines geeigneten unstetigen linearen Funktionals).*

**Übung 3.5.10.** *Sei $S$ ein ONS in einem Hilbertraum $H$. Für $x \in H$ seien in der Reihe $\sum_{e\in S}(x|e)e$ nur die Terme $\neq 0$ notiert (wegen der Besselschen Ungleichung höchstens abzählbar viele). Man zeige:*

*(a) Die Reihe konvergiert unbedingt, d.h. auch jede Umordnung konvergiert, mit gleichem Grenzwert.*

*(b) Die Abbildung $P : x \mapsto \sum_{e\in S}(x|e)e$ ist die orthogonale Projektion auf $\overline{\mathrm{Lin} S}$.*

**Übung 3.5.11.** *Man zeige: Ein unendlich-dimensionaler Hilbertraum $H$ ist genau dann separabel, wenn $H \cong \ell^2 (= \ell^2(\mathbb{N}))$ gilt (isometrische Isomorphie).*

**Übung 3.5.12.** *Man zeige den Satz von Fischer-Riesz: $L^2(0, 1) \cong \ell^2$ (isometrische Isomorphie).*

**Übung 3.5.13.** *Für eine Funktion $f \in L^2([0, 1])$ und $n \in \mathbb{Z}$ ist*

$$\hat{f}(n) = \int_0^1 f(t)e^{-2\pi int}dt$$

*ihr $n$-ter* **Fourierkoeffizient**. *Man zeige, daß die* **Fouriertransformation**

$$\mathfrak{F} : f \mapsto \{\hat{f}(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

*ein isometrischer Isomorphismus von $L^2([0, 1])$ auf $\ell^2(\mathbb{Z})$ ist.*

**Übung 3.5.14.** *Man zeige: Eine Folge $\{x_n\}$ im Praehilbertraum $G$ konvergiert genau dann gegen $x \in G$, wenn $\|x_n\| \to \|x\|$ und $x_n \overset{w}{\to} x$ gilt, wobei $x_n \overset{w}{\to} x$ schwache Konvergenz, also $(x_n|y) \to (x|y)\ \forall y \in G$ bedeutet.*

**Übung 3.5.15.** *Man zeige, daß für eine Reihe $\sum x_n$ mit paarweise orthogonalen $x_n$ in einem Hilbertraum Folgendes gilt:*

*$\sum x_n$ konvergiert $\Leftrightarrow \sum \|x_n\|^2 < \infty \Leftrightarrow \sum x_n$ konvergiert schwach.*

**Übung 3.5.16.** *Sei $H$ ein Hilbertraum und $T \in B(H)$. Man zeige: $\|T\| = \|T^*\|$ und $\|TT^*\| = \|T^*T\| = \|T\|^2$.*

**Übung 3.5.17.** *$T \in B(H)$ heißt* **normal**, *wenn $T^*T = TT^*$ gilt. Man zeige: $T$ ist normal $\Leftrightarrow \|Tx\| = \|T^*x\|\ \forall x \in H$. Insbesondere gilt $\ker T = \ker T^*$, also auch $\ker T = (TH)^\perp$.*

**Übung 3.5.18.** *Man zeige: Ist $T$ normal, so gilt $\|T^n\| = \|T\|^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. (Hinweis: erst für $n = 2^k$ zeigen).*

**Übung 3.5.19.** *Man gebe ein Beispiel eines $T \in B(H)$, für welches die Behauptungen von 3.5.17 und 3.5.18 nicht zutreffen.*

**Übung 3.5.20.** *Sei $M$ ein linearer Teilraum des Hilbertraums $H$. Ist $T \in B(H)$ mit $TM \subset M$, so gilt $T^*M^\perp \subset M^\perp$.*

**Übung 3.5.21.** *(Charakterisierung orthogonaler Projektionen) Sei $M$ ein abgeschlossener Teilraum im Hilbertraum $H$ und $P_M \in B(H)$ die orthogonale Projektion auf $M$. Man zeige:*
*(a) $P_M^2 = P_M = P_M^*$.*
*(b) Ist $P \in B(H)$ mit $P^2 = P = P^*$, so ist $P$ eine orthogonale Projektion, nämlich $P = P_N$, wo $N = PH$.*
*Wegen 3.5.17 genügt es bei (b) statt $P = P^*$ lediglich $P$ normal anzunehmen.*

**Satz 3.5.22.** *Ist $P \in B(H)$ eine Projektion (d.h. $P^2 = P$) mit $\|P\| \leq 1$, so ist $P$ eine orthogonale Projektion, also $P = P_{PH}$.*

*Beweis.* (a) Wegen $x = Px + (I - P)x \;\forall x \in H$ gilt $H = M + N$, wo $M = PH$, $N = (I-P)H$, und $y := Px - x \in N \;\forall x \in H$. Für $x \in N^\perp$ gilt somit $Px = y + x$ mit $(y|x) = 0$. Es folgt $\|y\|^2 + \|x\|^2 = \|Px\|^2 \leq \|x\|^2$, also $y = 0$ und $Px = x$ für $x \in N^\perp$, d.h. $N^\perp \subset M$.

(b) Sei nun $m \in M$, also $Pm = m$ wegen $P^2 = P$. Da $H = N + N^\perp$ (denn $N$ ist abgeschlossen in $H$ wegen der Stetigkeit der Projektion $I - P$) gilt $m = n + n^\perp$ mit $n \in N$, $n^\perp \in N^\perp$, also $m = Pm = 0 + Pn^\perp = n^\perp \in N^\perp$ (da nach (a) $N^\perp \subset M$ und $P|_M = id_M$). Somit gilt $M \subset N^\perp$, also $M = N^\perp$ und $N = N^{\perp\perp} = M^\perp$, d.h. $P = P_M$. □

**Übung 3.5.23.** *Seien $U, V$ abgeschlossene Teilräume eines Hilbertraumes $H$. Man zeige: $U \subset V \Leftrightarrow P_U = P_U P_V = P_V P_U$.*

**Übung 3.5.24.** *Die Adjungierte eines Operators $S \in B(H)$ lässt sich allgemeiner für Operatoren $S \in B(H, K)$ zwischen zwei Hilberträume $H$ und $K$, ebenfalls mit Hilfe des Rieszschen Darstellungssatzes, definieren.*

*Man zeige:*

*(a) Wie im Fall $H = K$ ist die Abbildung $S \mapsto S^*$ isometrisch und antilinear (d.h.: $(\lambda S + R)^* = \overline{\lambda} S^* + R^*$), nun aber von $B(H, K)$ nach $B(K, H)$, mit $\|S\|^2 = \|S^*S\| = \|SS^*\|$ $S^{**} = S$, und $\ker S^* = (SH)^\perp$, $\ker S = (S^*H)^\perp$. Für $S \in B(H, K), R \in B(K, L)$ gilt $(RS)^* = S^*R^*$.*

*(b) Sind $j_1$, $j_2$ die kanonischen antilinearen isometrischen Isomorphismen von $H$ auf $H'$ bzw. von $K$ auf $K'$, so gilt $S^* = j_1^{-1} S' j_2$, wobei $S'$ der im Sinne von Kapitel 2 adjungierte Operator von $S$ ist.*

**Übung 3.5.25.** *Für $T \in B(H)$ zeige man:*
*(a) Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ gilt*

$$(Tx|x) \in \mathbb{R} \;\forall x \in H \;\Leftrightarrow T = T^*.$$

*(b) Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ gilt das nicht (Gegenbeispiel).*

**Übung 3.5.26.** *Für $T \in B(H)$ zeige man:*

*(a) Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ gilt*

$$(Tx|x) = 0 \; \forall x \in H \Rightarrow T = 0.$$

*(b) Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ gilt das nicht (Gegenbeispiel). Fügt man aber die Voraussetzung $T = T^*$ hinzu, so gilt die in (a) genannte Implikation ebenfalls.*

**Übung 3.5.27.** *Man zeige, daß für $T \in B(H)$ Folgendes äquivalent ist:*

*(a) $T$ ist unitär, d.h. $T^*T = TT^* = I = \mathrm{Id}_H$.*

*(b) $T$ ist surjektiv und $\|Tx\| = \|x\| \; \forall x \in H$,*

*(c) $T$ ist surjektiv und $(Tx|Ty) = (x|y) \; \forall \, x, y \in H$.*

**Übung 3.5.28.** *Sei $H$ ein Hilbertraum, Dim $H$ seine Hilbertdimension, also die Kardinalität einer Orthonormalbasis von $H$, dim $H$ seine Vektorraumdimension, also die Kardinalität einer Hamel-Basis von $H$.*

*Man zeige:*

*(a) Ist Dim $H = \aleph_0$, also $H$ separabel, so gilt $\aleph_1 \leq$ dim $H \leq c$, also Dim $H <$ dim $H$. (Hinweis: Kardinalität von $H$ abschätzen.)*

*(b) Ist Dim $H = c$, so gilt auch dim $H = c$.*

# Kapitel 4

# Spektraltheorie

## 4.1 Grundbegriffe

Sei $A$ eine Algebra, über $\mathbb{K}$ d.h. ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ mit einer Abbildung ("Multiplikation") $(a, b) \mapsto ab$ von $A \times A$ nach $A$, die bilinear ist und das Assoziativitätsgesetz $(ab)c = a(bc)$ erfüllt. Ein Element $\mathbf{e} \in A$ heißt Eins oder Eins-Element der Algebra $A$, wenn $\mathbf{e}a = a\mathbf{e} = a$ für alle $a \in A$ gilt. Das Eins-Element (sofern es existiert) ist eindeutig bestimmt. Im Folgenden sei vorausgesetzt, daß $A$ eine Eins besitzt. Ist $a \in A$, so heißt $b$ Inverses zu $a$, wenn $ba = ab = \mathbf{e}$ gilt. Das Inverse zu $a$ (sofern es exisitiert) ist eindeutig bestimmt und wird mit $a^{-1}$ bezeichnet. Ist $\mu \in \mathbb{K}$ und $\mathbf{e}$ die Eins von $A$, so schreiben wir für $\mu\mathbf{e}$ auch kurz $\mu$.

**Das Spektrum eines Elements einer Algebra**

**Definition 4.1.1.** *Sei $a \in A$. Die Menge*

$$\rho(a) := \{\lambda \in \mathbb{K} \mid (\lambda - a)^{-1} \textit{existiert}\}$$

heißt die **Resolventenmenge** von $a$, ihr Komplement

$$\sigma(a) := \mathbb{K} \ \setminus \ \rho(a)$$

heißt das **Spektrum** von $a$

**Bemerkung.** Resolventenmenge und Spektrum hängen von der zugrundegelegeten Algebra $A$ ab.

**Beispiel 4.1.2.** *Sei $A$ die Algebra der Polynome auf dem Intervall $[0, 1]$, $B$ die Algebra der stetigen Funktionen auf $[0, 1]$, beide mit punktweise definierten Operationen, und sei $a$ die Funktion $a(x) = x$. Es gilt $a \in A \subset B$. Das Spektrum von $a$ in $A$ ist ganz $\mathbb{K}$, da das Polynom $f(x) = \lambda - x$ für kein $\lambda$ in $A$ invertierbar ist. Dagegen ist das Spektrum von $a$ in $B$ gerade $[0, 1]$, denn als stetige Funktion* *lässt sich* $f(x) = \lambda - x$ *genau dann invertieren, wenn* $f$ *überall auf* $[0,1]$ *von Null verschieden ist, d.h. wenn* $\lambda \notin [0,1]$ *ist.*

**Das Spektrum eines Operators**

Ist $E$ ein normierter Raum und $A$ die Algebra $B(E)$ mit der Eins $\mathbf{e} = \mathrm{Id}_E$, so unterteilt man das Spektrum von $T \in B(E)$ wie folgt:

$$\sigma_p(T) := \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \text{ es gibt } x \neq 0 \in E \text{ mit } (\lambda - T)x = 0\}$$

heißt das **Punktspektrum** von $T$,

$$\sigma_c(T) := \{\lambda \in \sigma(T) \mid (\lambda - T) \text{ ist injektiv, } \overline{(\lambda - T)E} = E\}$$

heißt das **kontinuierliche Spektrum** von $T$ (die Einschränkung $\lambda \in \sigma(T)$ bei der Definition von $\sigma_c(T)$ ist nötig, weil sonst $\rho(T)$ in $\sigma_c(T)$ enthalten wäre);

$$\begin{aligned}\sigma_r(T) &:= \sigma(T) \setminus (\sigma_p(T) \cup \sigma_c(T)) \\ &= \{\lambda \in \mathbb{K} \mid (\lambda - T) \text{ ist injektiv, } (\lambda - T)E \text{ ist nicht dicht in } E\}\end{aligned}$$

heißt das **Restspektrum** oder **Residualspektrum** von $T$. Offenbar ist $\sigma(T)$ disjunkte Vereinigung von $\sigma_p(T), \sigma_c(T)$ und $\sigma_r(T)$.

Man definitert außerdem ein **approximatives Punktspektrum**

$$\sigma_a T := \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \forall \varepsilon > 0\, \exists x \text{ mit } \|x\| = 1 \text{ und } \|(\lambda - T)x\| < \varepsilon\}.$$

Es gilt $\sigma_a(T) \subset \sigma(T)$, denn ist $S \in B(E)$ invertierbar in $B(E)$, so folgt aus der Stetigkeit von $S^{-1}$ die Existenz einer Konstanten $C > 0$ mit $\|Sx\| \geq C\|x\|$, insbesondere $\|Sx\| \geq c$ für alle $x$ mit $\|x\| = 1$; Anwendung auf $S = \lambda - T$ zeigt also, dass $\lambda - T$ für $\lambda \in \sigma_a(T)$ nicht invertierbar ist und somit $\sigma_a(T) \subset \sigma(T)$ gilt.

Die Algebra $B(E)$ ist mit der Operatornorm ein normierter Raum und es gilt $\|TS\| \leq \|T\|\,\|S\|$, d.h. $B(E)$ ist eine **normierte Algebra**. Ist $E$ ein Banachraum, so ist $B(E)$ eine **Banachalgebra**, d.h. eine normierte Algebra, die (als normierter Raum) vollständig ist. Für die Eins $\mathbf{e} = \mathrm{Id}_E$ von $B(E)$ gilt $\|\mathbf{e}\| = 1$.

**Invertierbare Elemente**

Im Folgenden sei $A$ eine Banachalgebra mit Eins.

**Proposition 4.1.3** (geometrische oder Neumannsche Reihe)**.** . *Ist* $a \in A$ *mit* $\|a\| < 1$*, so ist* $\mathbf{e} - a$ *in* $A$ *invertrierbar und es gilt*

$$(\mathbf{e} - a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \qquad (\textit{wobei } a^0 = \mathbf{e} = \textit{ Eins von } A)$$

*Beweis.* Wegen $\|a\| < 1$ konvergiert die Reihe $\sum_0^\infty a^n$ absolut, und es gilt

$$(\mathbf{e}-a)\sum_{n=0}^{\infty}a^n=\sum_{n=0}^{\infty}a^n-\sum_{n=1}^{\infty}a^n=\mathbf{e},$$

ebenso $(\sum_0^\infty a^n)(\mathbf{e}-a)=1$. Also existiert $(\mathbf{e}-a)^{-1}$ und ist gleich $\sum_0^\infty a^n$. □

**Satz 4.1.4.** *Sei $a \in A$ invertierbar, $b \in A$ mit $\|a-b\| < \|a^{-1}\|^{-1}$. Dann ist $b$ invertierbar und $b^{-1}=\sum_0^\infty [a^{-1}(a-b)]^n a^{-1}$, wobei die Reihe absolut konvergiert.*

*Beweis.* Es ist

$$b=a-(a-b)=a(\mathbf{e}-a^{-1}(a-b))$$

Da $\|a^{-1}(a-b)\| \leq \|a^{-1}\|\,\|a-b\| < 1$, ist nach Proposition oben

$$(\mathbf{e}-a^{-1}(a-b))^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(a^{-1}(a-b)]^n, \text{ also}$$

$$b^{-1}=\sum_0^\infty [a^{-1}(a-b)]^n a^{-1}$$

□

**Korollar 4.1.5.** *(a) Die Menge $Inv(A)$ der invertierbaren Elemente von $A$ ist offen.*

*(b) Die Abbildung $a \mapsto a^{-1}$ von $Inv(A)$ auf sich ist stetig.*

*(c) $\rho(a)$ ist offen (für jedes $a \in A$).*

*(d) Die* **Resolvente** *$\mathcal{R}_\lambda(a) := (\lambda-a)^{-1}$ ist als Funktion von $\lambda$ in $\rho(a)$ analytisch (d.h. sie lässt sich lokal als absolut konvergente Potenzreihe $\sum_0^\infty b_n(\lambda-\lambda_0)^n$ mit $b_n \in A$ darstellen).*

*(e) Für $|\lambda| > \|a\|$ gilt $\lambda \in \rho(a)$ und $\|\mathcal{R}_\lambda(a)\| \leq \frac{1}{|\lambda|-\|a\|}$.*

*(f) $\sigma(a)$ ist kompakt.*

*Beweis.* (a) ist wegen Satz 4.1.4 klar.

(b) Es gilt

$$b^{-1}-a^{-1}=\sum_1^\infty [a^{-1}(a-b)]^n a^{-1},$$

so daß

$$\|b^{-1}-a^{-1}\| \leq \sum_1^\infty (\|a^{-1} \mid \|a-b\|)^n \|a^{-1}\|$$

gegen Null geht, wenn $\|a-b\|$ gegen Null geht.

(c) Ist $\lambda \in \rho(a)$ und $K_r(\lambda - a)$ eine Kugel um $\lambda - a$, die noch ganz in $Inv(A)$ liegt (was nach (a) für genügend kleines $r$ der Fall ist), so gilt für $\mu \in \mathbb{K}$ mit $|\lambda - \mu| < \frac{r}{\|\mathbf{e}\|}$ wegen $\|(\lambda - a) - (\mu - a)\| = |\lambda - \mu| \, \|\mathbf{e}\| < r$, dass $\mu - a$ invertierbar ist, $\mu$ also zu $\rho(a)$ gehört.

(d) Sei $\lambda_0 \in \rho(a)$. Nach Satz 4.1.4 gilt für $\lambda$ mit $|\lambda - \lambda_0| < \|(\lambda_0 - a)^{-1}\|^{-1}$:

$$\mathcal{R}_\lambda(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{R}_{\lambda_0}^{n+1}(a)(\lambda_0 - \lambda)^n.$$

Diese Reihe ist wegen $\|\mathcal{R}_{\lambda_0}^{n+1}(a)(\lambda_0 - \lambda)^n\| \leq \|\mathcal{R}_{\lambda_0}(a)\| \, \|\mathcal{R}_{\lambda_0}(a)\|^n \cdot |\lambda_0 - \lambda|^n$ für die angegebenen $\lambda$ absolut konvergent.

(e) Für $|\lambda| > \|a\|$ gilt $\lambda - a = \lambda(\mathbf{e} - \frac{a}{\lambda})$ und $\|\frac{a}{\lambda}\| < 1$, also $(\lambda - a)^{-1} = \lambda^{-1} \sum_0^\infty (\frac{a}{\lambda})^n$

□

**Proposition 4.1.6.** *Sei $B$ eine Banachalgebra mit Eins und $A$ eine abgeschlossene Unteralgebra von $B$, welche die Eins von $B$ enthält. Für $b \in A$ gilt*

*(i)* $\sigma_B(b) \subset \sigma_A(b)$

*(ii)* $\partial\sigma_A(b) \subset \partial\sigma_B(b)$.

*Beweis.* (i) ist wegen $A \subset B$ klar.

(ii) Sei $\lambda \notin \partial\sigma_B(b)$. Ist $\lambda \in \partial\sigma_A(b)$, so gibt es $\lambda_n \in \rho_A(b) \subset \rho_B(b)$ mit $\lambda_n \to \lambda$. Wegen $\lambda \notin \partial\sigma_B(b)$ muss $\lambda$ in $\rho_B(b)$ liegen. Da die Inversion stetig ist, ist also

$$C = \sup_n \|(\lambda_n - b)^{-1}\|_B < \infty.$$

Es gilt

$$\lambda - b = \lambda - \lambda_n + \lambda_n - b = (\lambda_n - b)[(\lambda - \lambda_n)(\lambda_n - b)^{-1} + \mathbf{e})]$$

und für $|\lambda - \lambda_n| < \frac{1}{2C}$:

$$\|(\lambda - \lambda_n)(\lambda_n - b)^{-1}\|_A = \|(\lambda - \lambda_n)(\lambda_n - b)^{-1}\|_B \leq \frac{1}{2C} \cdot C < 1.$$

Also ist $\mathbf{e}+(\lambda-\lambda_n)(\lambda_n-b)^{-1}$ nach Proposition 4.1.3 in $A$ invertierbar und, wegen $\lambda_n \in \rho_A(b)$, auch $\lambda - b$. Somit $\lambda \notin \sigma_A(b) \supset \partial\sigma_A(b)$, was $\lambda \in \partial\sigma_A(b)$ widerspricht.

□

## 4.2 Der Spektralradius

Im Folgenden sei wieder $A$ eine Banachalgebra mit Eins und es gelte $\|a\| = 1$. In diesem Abschnitt führen wir das Konzept des Spektralradius ein und beweisen zwei wichtige Sätze, den Satz von Gelfand und den Satz von Gelfand-Mazur.

**Definition 4.2.1.** *Für $a \in A$ heißt*

$$r(a) := \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$$

*der* **Spektralradius** *von $a$.*

**Bemerkung.** Der Spektralradius $r(a)$ ist wohldefiniert, d.h. der Grenzwert $r(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$ existiert.

*Beweis.* Wir zeigen nun, dass $\lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$ existiert. Ist $k \in \mathbb{N}$, so lässt sich jedes $n \in \mathbb{N}$ in der Form $n = p_n k + q_n$ mit $0 \leq q_n < k$ schreiben. Wegen $\frac{q_n}{n} \to 0$, $\frac{p_n}{n} \to \frac{1}{k}$ erhalten wir

$$\|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \|a^{p_n k}\|^{\frac{1}{n}} \|a^{q_n}\|^{\frac{1}{n}} \leq \|a^k\|^{\frac{p_n}{n}} \|a\|^{\frac{q_n}{n}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \|a^k\|^{\frac{1}{k}}.$$

Also gilt

$$\limsup_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \|a^k\|^{\frac{1}{k}}$$

für jedes $k \in \mathbb{N}$ und somit

$$\limsup_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \liminf_{k\to\infty} \|a^k\|^{\frac{1}{k}}.$$

Hieraus folgt die Existenz von $\lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$ . □

### Charakterisierung des Spektralradius

**Satz 4.2.2** (Gelfand)**.** *Sei $A$ eine komplexe Banachalgebra mit Eins, und sei $a \in A$. Dann ist $\sigma(a)$ nicht leer und es gilt*

$$r(a) = sup\{\, |\lambda| \mid \lambda \in \sigma(a) \,\} =: r_\sigma(a).$$

*Beweis.* (i) Sei $\sigma(a) = \emptyset$. Dann ist $\mathcal{R}_\lambda(a)$ und damit auch $\lambda \mapsto <\mathcal{R}_\lambda(a), f> = f \circ \mathcal{R}_\lambda(a)$ (wobei $f \in A'$ beliebig) nach Korollar 4.1.5 (d) oben analytisch auf ganz $\mathbb{C}$ und ausserdem wegen 4.1.5 (e) beschränkt. Nach dem Satz von Liouville ist $f \circ \mathcal{R}_\lambda(a)$ konstant, also wegen (e) gleich Null. Nach dem Satz von Hahn-Banach muss dann $\mathcal{R}_\lambda(a)$ null sein. Das liefert $0 = \mathcal{R}_\lambda(a)(\lambda - a) = 1$, ein Widerspruch. Also ist $\sigma(a)$ nicht leer.

(ii) Wir zeigen $r_\sigma(a) \leq r(a)$. Sei $|\lambda| > r(a)$. Für $s, t$ mit $|\lambda| > s > t > r(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\|a_n\|^{\frac{1}{n}} < t$$

für $n > n_0$ . Die Reihe $\sum_0^\infty (\frac{a}{\lambda})$ ist also wegen $\|(\frac{a}{\lambda})^n\| = \frac{\|a^n\|}{|\lambda|^n} < \frac{t^n}{s^n}$ (für $n > n_0$ ) und $\frac{t}{s} < 1$ absolut konvergent. Wie in Korollar 4.1.5 (e) oben folgt $\lambda \in \rho(a)$ (sowie $\mathcal{R}_\lambda(a) = \sum_0^\infty \lambda^{-n-1} a^n$ ), also $\lambda \in \sigma(a)$. Somit gilt $|\lambda| \leq r(a)$ für alle $\lambda \in \sigma(a)$. Die Reihe für $\mathcal{R}_\lambda(a)$ konvergiert übrigens für $|\lambda| \geq s > r(a)$ gleichmäßig und absolut.

(iii) Wir zeigen $r_\sigma(a) \geq r(a)$. Wegen der in (ii) gewonnenen Darstellung von $\mathcal{R}_\lambda(a)$ für $|\lambda| > r(a)$ und $\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\lambda|=s} \lambda^n d\lambda = \delta_{-1,n}$ für $n \in \mathbb{Z}$ (gewöhnliches komplexes Integral, elementar auszurechnen) erhalten wir für $s > r(a)$ und $k \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\lambda|=s} \lambda^k \mathcal{R}_\lambda(a) d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\lambda|=s} (\sum_0^\infty \lambda^{k-n-1} a^n) d\lambda = a^k.$$

Da die Resolvente nach (ii) sogar für alle $\lambda$ mit $|\lambda| > r_\sigma(a)$ existiert und, wie wir wissen, überall, wo sie definiert ist, auch analytisch ist, gilt die soeben bewiesene Gleichung auch für beliebiges $s > r_\sigma(a)$: Ist $s' > s > r_\sigma(a)$, so ergibt sich

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\lambda|=s} \lambda^k \mathcal{R}_\lambda(a) d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\lambda|=s'} \lambda^k \mathcal{R}_\lambda(a) d\lambda$$

nach dem Cauchyschen Integralsatz, da der Integrand im Gebiet zwischen den beiden Integrationswegen holomorph ist. (Genauer: Wendet man ein beliebiges $f \in A'$ auf die $A$-wertigen Integrale an, erhält man mit dem Cauchyschen Integralsatz Gleichheit der nun komplexwertigen Integrale. Und schließt nun mit Hahn-Banach auf die Gleichheit der $A$-wertigen Integrale.) Also gilt die obige Gleichung für beliebiges $s > r_\sigma(a)$. Wir schätzen ab:

$$\|a^k\| \leq \frac{1}{2\pi} s^k \cdot \sup_{|\lambda|=s} \|\mathcal{R}_\lambda(a)\| \cdot 2\pi s = \text{const}\; s^{k+1}.$$

Hieraus folgt $\|a^k\|^{\frac{1}{k}} \leq \text{const}^{\frac{1}{k}} \cdot s^{1+\frac{1}{k}} \to s$, also

$$r(a) = \lim_{k\to\infty} \|a\|^{\frac{1}{k}} \leq s.$$

Da dies für alle $s > r_\sigma(a)$ richtig ist, erhalten wir $r(a) \leq r_\sigma(a)$.

□

Dieser Satz, der für nicht vollständige normierte Algebren falsch ist, illustriert, welche erstaunlichen Konsequenzen Vollständigkeit haben kann. Grob gesprochen ist die linke Seite der in Satz 4.2.2 behaupteten Gleichung topologisch definiert, die rechte algebraisch.

**Korollar 4.2.3.** *In einer komplexen, normierten Algebra mit Eins hat jedes Element nichtleeres Spektrum.*

*Beweis.* Ist $A$ eine normierte Algebra so ist die Vervollständigung $\hat{A}$ eine Banachalgebra. Für $a \in A$ gilt: $\sigma_A(a) \supset \sigma_{\hat{A}}(a) \neq \emptyset$ (nach Satz 4.2.2). □

### Satz von Gelfand-Mazur

**Definition 4.2.4.** *Seien $A, B$ Algebren über $\mathbb{K}$. Eine Abbildung $f : A \to B$ heißt* **(Algebren-) Homomorphismus** *von $a$ nach $B$, wenn $f$ linear ist und $F(ab) = f(a)f(b)$ gilt. Ist $f$ außerdem bijektiv, so heißt $f$* **(Algebren-) Isomorphismus** *und $A$ und $B$ heißen zueinender isomorph.*

**Satz 4.2.5** (Gelfand- Mazur)**.** *Sei $A$ eine komplexe normierte Divisionsalgebra, d.h. eine normierte Algebra über $\mathbb{C}$, in der jedes von Null verschiedene Element invertierbar ist. Dann ist $A$ bistetig isomorph zu $\mathbb{C}$.*

*Beweis.* Sei $a \in A$. Nach Korollar 4.2.3 ist $\sigma(a)$ nicht leer. Sei $\lambda \in \sigma(a)$, also $\lambda - a$ nicht invertierbar. Nach Voraussetzung muss dann $\lambda - a = 0$ sein, also $a = \lambda \cdot \mathbf{e}$ (wo $\mathbf{e}$ die Eins der Algebra ist). Die Abbildung $\lambda \mapsto \lambda \cdot \mathbf{e}$ ist offenbar ein injektiver Algebrenhomorphismus von $\mathbb{C}$ nach $A$, und die Überlegung zu Beginn zeigt die Surjektivität. Es gilt $\|\lambda \cdot \mathbf{e}\| = |\lambda| \cdot \|\mathbf{e}\|$, also ist die Abbildung bistetig, im Fall $\|\mathbf{e}\| = 1$ isometrisch, womit die Behauptung bewiesen ist. $\square$

## 4.3 Gelfandsche Darstellungstheorie

Sei $A$ eine Algebra mit Eins.

**Definition 4.3.1.** *Ein* **Ideal** *von $A$ ist ein linearer Teilraum $I$ mit der Eigenschaft $aI \subset I$ und $Ib \subset I$ für allle $a, b \in A$. Das Ideal $I$ heißt* **maximal***, wenn gilt: Ist $J$ ein Ideal mit $I \subset J$ , so folgt $J = I$ oder $J = A$. Ein Ideal $I$ heißt* **echt***, wenn $I \neq A$ gilt.*

**Bemerkung.**

(i) Ist $I$ ein Ideal in $A$, so ist der **Faktorraum** $A/I := \{a + I | a \in A\}$ mit den Definitionen $\lambda(a + I) := \lambda a + I, (a + I) + (b + I) := (a + b) + I$, $(a + I) \cdot (b + I) := ab + I$ eine Algebra. Die Abbildung $a \mapsto a + I$ ist ein Algebrenhomomorphismus von $A$ auf $A/I$, bei dem die Eins von $A$ auf die Eins von $A/I$ übergeht. Ist $I$ ein maximales Ideal in $A$, so besitzt $A/I$ keine Ideale ausser 0 und $A/I$. Wenn zusätzlich $A/I$ kommutativ ist, ist dies gleichbedeutend damit, dass jedes von Null verschiedene Element in $A/I$ ein Inverses besitzt.

(ii) Ist $A$ eine Banachalgebra und $I$ ein abgeschlossenes Ideal von $A$, so ist $A/I$ mit der Quotientennorm $\|a+I\|_0 = \inf_{i \in I} \|a+i\|$ eine Banachalgebra, denn wie wir schon wissen, ist $A/I$ ein Banachraum, und aus

$$\|(a + i)(b + j)\| \leq \|a + i\|\|b + j\|$$

folgt für $i, j \in I$

$$\|ab + I\|_0 = \|(a + i)(b + j) + I\|_0 \leq \|(a + i)(b + j)\| \leq \|a + i\|\|b + j\|,$$

also auch

$$\|ab + I\|_0 \leq \inf_{i \in I} \|a + i\| \inf_{j \in I} \|b + j\| = \|a + Ik\|_0 \|b + I\|_0.$$

## Das Spektrum einer Banachalgebra

**Definition 4.3.2.** *Ist $A$ eine komplexe Banachalgebra mit Eins* $\mathbf{e}$*, so heißt*

$$X(A) := \{ \varphi : A \to \mathbb{C} \mid \varphi(\mathbf{e}) = 1, \varphi \text{ Algebrenhomomorphismus}\}$$

*das* **Spektrum** *(auch:* **Gelfandraum***) von $A$. Für $x \in A$ und $\varphi \in X(A)$ setze $\hat{x}(\varphi) := \varphi(x)$. Die Abbildung $x \mapsto \hat{x}$ heißt* **Gelfandtransformation**.

Für die Elemente von $X(A)$, multiplikative lineare Funktionale, wird keine Stetigkeit vorausgesetzt. Der folgende Satz zeigt unter anderem, daß sie stetig sind und Norm $\leq 1$ haben.

**Satz 4.3.3** (Gelfandscher Darstellungssatz)**.** *Sei $A$ eine kommutative Banachalgebra mit Eins. Im folgenden sei $X(A)$ stets mit der schwach$^*$ -Topologie versehen. Dann gilt:*

*(a) $X(A) \subset A'_1$ (Einheitskugel des Dualraumes von $A$) und $X(A)$ ist schwach$^*$ kompakt.*

*(b) Die Gelfandtransformation $x \mapsto \hat{x}$ ist ein Algebrenhomorphismus von $A$ nach $C(X(A))$ (Algebra der stetigen Funktionen auf $X(A)$).*

*(c) Für $x \in A$ gilt*

$$\sigma(x) = \{ \varphi(x) \mid \varphi \in X(A)\},$$

*also*

$$\|\hat{x}\|_\infty = \sup_{\varphi \in X(A)} |\hat{x}(\varphi)| = \sup_{\lambda \in \sigma(x)} |\lambda| = r(x) \leq \|x\|,$$

*(d) $\hat{A} = \{ \hat{x} \mid x \in A\}$* **trennt Punkte** *von $X(A)$, d.h. zu $\varphi \neq \psi \in X(A)$gibt es $a \in A$ mit $\hat{a}(\varphi) \neq \hat{a}(\psi)$.*

*(e) Wird $A$ von einem Element $f$ und dem Einselement* $\mathbf{e}$ *erzeugt, d.h. ist die kleinste abgeschlossene Unteralgebra, die $f$ und* $\mathbf{e}$ *enthält, gleich $A$ selbst, so ist $\sigma(f)$ als Teilmenge von $\mathbb{C}$ zu $X(A)$ homöomorph durch die Zuordnung $\varphi(f) \leftrightarrow \varphi$ . Identifiziert man $X(A)$ mit $\sigma(f)$ vermöge dieser Homomorphie, so führt die Abbildung $a \mapsto \hat{a}$ das Element $f$ in die identische Abbildung von $\sigma(f)$ und das Element* $\mathbf{e}$ *in die konstante Funktion* $\mathbf{1}$ *auf $\sigma(f)$ über.*

*Beweis.* (a) Für $x \in A$ und $\varphi \in X(A)$ gilt

$$\varphi(\varphi(x) \cdot \mathbf{e} - x) = \varphi(x)\varphi(\mathbf{e}) - \varphi(x) = 0.$$

Deshalb ist $\varphi(x) - x$ nicht invertierbar (denn für jedes invertierbare $a \in A$ gilt

$$\varphi(a)\varphi(a^{-1}) = \varphi(\mathbf{e}) = 1,$$

also $\varphi(a) \neq 0$) und somit $\varphi(x) \in \sigma(x)$. Hieraus folgt $|\varphi(x)| \leq \|x\|$, also ist $\varphi$ beschränkt und hat Norm $\leq 1$.

Ist $\{\varphi_\mu\}$ ein Netz in $X(A)$, das schwach$^*$ gegen $\varphi \in A'_1$ konvergiert, so gilt

$$\varphi(ab) = \lim \varphi_\mu(ab) = \lim(\varphi_\mu(a)\varphi_\mu(b)) = \lim \varphi_\mu(a) \cdot \lim \varphi_\mu(b) = \varphi(a)\varphi(b)$$

und

$$\varphi(\mathbf{e}) = \lim \varphi_\mu(\mathbf{e}) = 1,$$

also ist $X(A)$ in $A'_1$ schwach$^*$-abgeschlossen, und somit, (da $A'_1$ schwach$^*$-kompakt ist) auch schwach$^*$ -kompakt.

(b) folgt unmittelbar aus den Definitionen.

(c) Wie schon unter (a) gezeigt, gilt $\{\, \varphi(x) \mid \varphi \in X(A)\} \subset \sigma(x)$. Sei nun $\lambda \in \sigma(x)$. Dann ist $\lambda - x$ nicht invertierbar, also $I = A(\lambda - x)$ ein echtes Ideal von $A$. Nach dem Lemma von Zorn gibt es ein echtes maximales Ideal $M \supset I$.

Da jedes $a \in A$ mit $\|a - \mathbf{e}\| < 1$ invertierbar ist (siehe geometrische Reihe4.1.3), also in keinem echten Ideal liegen kann, ist $M$ und damit auch $\overline{M}$ im Komplement der offenen Menge $K_1(\mathbf{e})$ enthalten. Da $M$ maximal und $\overline{M} \neq A$ ist, folgt $M = \overline{M}$ .

Nach der Bemerkung 4.3.1 ist dann $A/M$ eine **Banach-Divisionsalgebra**, d.h. eine Banachalgebra (da $M$ abgeschlossen), in der jedes von Null verschiedene Element invertierbar ist (da $M$ maximal, $A/M$ kommutativ).

Nach dem Satz von Gelfand-Mazur 4.2.5 gibt es einen isometrischen Isomorphismus $j$ von $A/M$ auf $\mathbb{C}$. Sei $p$ die kanonische Projektion $a \mapsto a + M$ von $A$ auf $A/M$ . Dann ist $\psi = j \circ p$ ein Algebrenhomorphismus von $A$ nach $\mathbb{C}$ mit $\psi(\mathbf{e}) = 1$. Da $\lambda - x \in I \subset M$, gilt $\psi(\lambda - x) \in \psi(M) = j \circ p(M) = 0$, also $\psi(x) = \psi(\lambda) = \lambda\psi(\mathbf{e}) = \lambda$. Damit ist auch die Inklusion $\sigma(x) \subset \{\, \varphi(x) \mid \varphi \in X(A))\}$ gezeigt, also die Gleichheit dieser Mengen. Der Rest von (c) folgt hieraus unmittelbar.

(d) Gilt $\varphi(a) = \psi(a)$ für alle $a \in A$, so ist $\varphi = \psi$.

(e) Nach (c) ist die Abbildung $\varphi \mapsto \varphi(f)$ von $X(A)$ nach $\sigma(f)$ surjektiv, und sie ist offensichtlich stetig (nach Definition der schwach$^*$-Topologie). Wir zeigen die Injektivität. Sei $\varphi(f) = \psi(f)$. Dann gilt auch für alle Polynome

$$P(f) = a_n f^n + \ldots + a_1 f + a_0 \cdot \mathbf{e} \text{ (wobei } a_i \in \mathbb{C}\text{):}$$

$$\varphi(P(f)) = \psi(P(f)).$$

Aus Stetigkeitsgründen müssen $\varphi$ und $\psi$ auf dem Abschluss der Menge $\{\, P(f) \mid P \text{ ein Polynom}\}$ übereinstimmen (das ist aber die kleinste abgeschlossene Unteralgebra, die $f$ und $\mathbf{e}$ enthält), also nach Voraussetzung auf ganz $A$ gleich sein, d.h. es muss $\varphi = \psi$ gelten. Damit ist die Injektivität von $\varphi \mapsto \varphi(f)$ gezeigt. Als stetige bijektive Abbildung zwischen zwei kompakten Hausdorffräumen muss nun $\varphi \mapsto \varphi(f)$ ein Homomorphismus sein. Identifizieren wir durch diese Abbildung $X(A)$ mit $\sigma(f)$, so nimmt $\hat{f}$ in $\varphi(f)$ (was

$\varphi \in X(A)$ entspricht) den Wert $f(\varphi) = \varphi(f)$ an, d.h. $\hat{f}$ ist die Identität auf $\sigma(f)$. Dass $\hat{\mathbf{e}}$ gerade die konstante Funktion 1 ist, ist klar, denn $\varphi(\mathbf{e}1) = 1$ für alle $\varphi \in X(A)$.

$\square$

## $C^*$-Algebren

**Definition 4.3.4.** *Sei $A$ eine komplexe Algebra. Eine* **Involution** *ist eine Abbildung $a \mapsto a^*$ von $A$ nach $A$ mit den Eigenschaften*

*(i)* $(\lambda a)^* = \overline{\lambda} a^*$

*(ii)* $(a + b)^* = a^* + b^*$

*(iii)* $(ab)^* = b^* a^*$

*(iv)* $(a^*)^* = a$.

*Eine Algebra mit Involution heißt* **$^*$-Algebra** *oder* **involutive Algebra***, im Fall einer Banachalgebra auch* **Banach-$^*$-Algebra***.*

**Bemerkung.** Aus (iv) folgt, daß jede Involution bijektiv ist. Besitzt $A$ eine Einse, so gilt $\mathbf{e}^* = \mathbf{e}$, da die Eins einer Algebra eindeutig bestimmt ist.

**Beispiele 4.3.5.** *(a) $A = \mathcal{C}([0,1])$ mit Involution $f \mapsto \overline{f}$ (Komplexkonjugation).*

*(b) $A = B(H)$, wo $H$ ein Hilbertraum, mit der Involution $T \mapsto T^*$, die jedem Operator seinen adjungierten Operator zuordnet.*

In beiden Beispielen gilt übrigens

$$\|a^* a\| = \|a\|^2 \text{ für alle } x \in A.$$

**Definition 4.3.6.** *Eine Banachalgebra mit einer Involution, die $\|a^* a\| = \|a\|^2$ erfüllt, heißt* **$C^*$-Algebra***.*

**Satz 4.3.7.** *Sei $A$ eine $C^*$-Algebra ( bei (i) und (iv) mit Eins $\mathbf{e}$) und sei $a \in A$. Es gelten:*

*(i)* $\|\mathbf{e}\| = 1$

*(ii)* $\|a^*\| = \|a\|$

*(iii) Ist $a$ normal (d.h. $a^* a = a a^*$), so gilt $\|a^{2^k}\| = \|a\|^{2^k}$, für $k \in \mathbb{N}$, folglich auch $r(a) = \|a\|$.*

*(iv) Ist $a$ selbstadjungiert (d.h. $a^* = a$), so gilt $\sigma(a) \subset \mathbb{R}$. (Elemente mit $a^* = a$ werden auch hermitesch genannt.)*

*(v) Für $\varphi \in X(A)$ gilt $\varphi(a^*) = \overline{\varphi(a)}$.*

*Beweis.* (i) $\|\mathbf{e}\|^2 = \|\mathbf{e}^*\mathbf{e}\| = \|\mathbf{e}\| \neq 0$, also $\|\mathbf{e}\| = 1$. (Der Trivialfall $A = \{0\}$ sei ausgeschlossen)

(ii) $\|a\|^2 = \|a^*a\| \leq \|a*\|\|a\|$, also $\|a\| \leq \|a^*\|$, folglich auch (ersetze $a$ durch $a^*$) $\|a^*\| \leq \|a^{**}\| = \|a\|$. Somit gilt $\|a\| = \|a^*\|$.

(iii) sei $a$ normal. Es gilt $\|a^2\|^2 = \|(a^2)^*(a^2)\| = \|(a^*a)(a^*a)\| = \|a^*a\|^2 = \|a\|^4$, also $\|a^2\| = \|a\|^2$, d. h. die Behauptung trifft für $k = 1$ zu. Anwendung auf $a^{2^k}$ (das auch normal ist) liefert $\|(a^{2^k})^2\| = \|a^{2^k}\|^2$. Gilt die Behauptung für $k$ so ist $\|a^{2^k}\|^2 = (\|a\|^{2^k})^2$, womit wir $\|a^{2^{k+1}}\| = \|a\|^{2^{k+1}}$ erhalten, d. h. die Behauptung gilt auch für $k+1$. Es folgt $r(a) = \lim \|a^k\|^{\frac{1}{k}} = \lim \|a^{2^k}\|^{\frac{1}{2^k}} = \|a\|$.

(iv) Sei $a = a^*$ und $\lambda = \alpha + i\beta \in \sigma(a)$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Für $t \in \mathbb{R}$ gilt dann $\alpha + i(\beta + t) = \lambda + it \in \sigma(a + it)$, folglich $\alpha^2 + (\beta + t)^2 = |\alpha + i(\beta + t)|^2 \leq \|a + it\|^2 = \|(a + it)^*(a + it)\| = \|a^2 + t^2\mathbf{e}\| \leq \|a^2\| + t^2$, also $\alpha^2 + \beta^2 + 2\beta t \leq \|\alpha^2\|$. Da $t \in \mathbb{R}$ beliebig war, folgt $\beta = 0$, d. h. $\lambda \in \mathbb{R}$.

(v) Für $x = x^* \in A$ gilt wegen $\varphi(x) \in \sigma(x)$ (4.3.3 (c)) und (iv) $\varphi(x) \in \mathbb{R}$. Ein beliebiges $a \in A$ lässt sich $a = x + iy$ mit $x = x^*$ und $y = y^*$ schreiben (nämlich $x = \frac{a+a^*}{2}$, $y = \frac{a-a^*}{2i}$). Folglich gilt $\varphi(a^*) = \varphi(x - iy) = \varphi(x) - i\varphi(y) = \overline{\varphi(x) + i\varphi(y)} = \overline{\varphi(a)}$, für jedes $\varphi(X)$.

□

Für späteren Gebrauch sei noch folgender Satz bereitgestellt.

**Satz 4.3.8** (Vertauschungssatz)**.** *Sei $A$ eine $C^*$-Algebra, $x, u \in A$ mit $xu = ux$, wobei $x$ normal ist. Dann gilt auch $x^*u = ux^*$.*

*Beweis.* (i) Für $a \in A$ sei

$$\exp a := \sum_0^\infty \frac{1}{n!} a^n.$$

Wie in der Analysis zeigt man $\exp a + b = \exp a \exp b$, falls $ab = ba$ gilt, und außerdem $(\exp a)^* = \exp a^*$, da die Involution stetig ist. Für **antihermitesches** $h$ (d.h. $h^* = -h$) gilt

$$\exp h (\exp h)^* = \exp(h - h) = \mathbf{e} \text{ und } (\exp h)^* \exp h = \mathbf{e},$$

Also

$$(\exp h)^* = (\exp h)^{-1},$$

d.h. $\exp h$ ist unitär und folglich

$$\|\exp h\|^2 = \|(\exp h)^* \exp h\| = \|\mathbf{e}\| = 1.$$

(ii) Nach Voraussetzung gilt $ux = xu$, also

$$(\exp x)u = u \exp x \text{ oder } u = (\exp -x) u \exp x.$$

Multiplikation von links und rechts mit $\exp x^*$ bzw. $\exp -x^*$ liefert

$$(\exp x^*)u(\exp -x^*) = \exp(x^* - x)u \exp(-(x^* - x)),$$

da $x$ normal ist, ist $\exp(x^* - x)$ unitär, folglich

$$\|(\exp x^*)u(\exp -x^*)\| \leq \|u\|.$$

Ersetzt man nun $x$ durch $\overline{z}x$, wo $z \in \mathbb{C}$, so ist

$$f(z) = \exp(zx^*)u \exp(-zx^*)$$

eine ganze ($A$-wertige) Funktion, die durch $\|u\|$ auf ganz $\mathbb{C}$ beschränkt ist. Nach dem Satz von Liouville also konstant ist, $f(z) = f(0) = u$. Somit gilt

$$\exp(zx^*)\, u = u\, \exp(zx^*).$$

Schreibt man dies als Gleichung von Potenzreihen, subtrahiert $u$, teilt durch $z$ und bildet den Limes für $z \to 0$, so ergibt sich

$$x^*u = ux^*.$$

□

## Satz von Gelfand-Naimark

Um den Satz von Gelfand-Naimark beweisen zu können, benötigen wir noch den Satz von Stone-Weierstraß.

**Satz 4.3.9** (Satz von Stone-Weierstraß)**.** *Sei $X$ ein kompakter Raum. $A \subset \mathcal{C}(X)$ eine Algebra mit folgenden Eigenschaften*

*(i) $A$ ist invariant unter Komplexkonjugation, d.h. für $a \in A$ ist $\overline{a} \in A$.*

*(ii) $A$ trennt Punkte von $X$, d.h. zu $x \neq y \in X$ gibt es $a \in A$ mit $a(x) \neq a(y)$.*

*(iii) $A$ verschwindet nirgends, d.h. zu $x \in X$ gibt es $a \in A$ mit $a(x) \neq 0$.*

*Dann ist $A$ dicht in $(\mathcal{C}(X), \|\ \|_\infty)$.*

*Beweis.* Es genügt zu zeigen, daß $B = \{\, a \in A]; |\, \overline{a} = a\}$ $(=: \Re A)$ dicht in $\mathcal{C}_\mathbb{R}(X)$ ist. $B$ ist eine Algebra reeller Funktionen, die ebenfalls (ii) und (iii) erfüllt.

(a) Für $b \in B$ lässt sich $|b|$ durch Elemente von $B$ approximieren. Denn: ist $\|b\|_\infty \leq C$ und sind $p_n$, $n \in \mathbb{N}$ Polynome mit $p_n(t) \to |t|$ gleichmäßig auf $[-C, C]$ (solche Polynome gibt es nach dem Satz von Weierstraß), so folgt $p_n(f) \to |f|$ gleichmäßig auf $X$. Wegen $f \vee g = \frac{1}{2}(f+g) + \frac{1}{2}|f+g|$ und $f \wedge g = \frac{1}{2}(f+g) - \frac{1}{2}|f-g|$ lassen sich auch Maximum und Minimum zweier Funktionen aus $B$ durch Elemente aus $B$ approximieren.

(b) Sei $f \in \mathcal{C}_\mathbb{R}(X)$. Zunächst zeigen wir, daß es zu $s,t \in X$ ein $f_{s,t} \in B$ mit $f_{s,t} = f$ auf $\{s,t\}$ gibt. Für $s = t$, wenn also nur übereinstimmung in einem Punkt verlangt wird, dann ist das wegen (iii) trivial. Für $s \neq t$ gibt es nach (ii) ein $a \in B$ mit $a(s) \neq a(t)$, wobei wir außerdem $a(s), b(s) \neq 0$ annehmen können (Ist z.B. $a(t) = 0$, so addiere man eine Funktion $b \in B$ mit $b(t) \neq 0$ und $\|b\|_\infty < a(s)$). Eine geeignete Linearkombination von $a$ und $a^2$ leistet nun das Gewünschte, denn $(a(s), a(t))$ und $(a^2(s), a^2(t))$ sind linear unabhängig.

(c) Ist $\varepsilon > 0$ und $s \in X$ fest, so gibt es wegen $f_{s,t}(t) = f(t)$ und der Stetigkeit von $f$ und $f_{s,t}(t)$ zu jedem $t \in X$ eine Umgebung $U_t$ mit $f_{s,t} > f - \varepsilon$ auf $U_t$. Endlich viele $U_{t_1}, \ldots, U_{t_n}$ überdecken $X$, denn $X$ ist kompakt. Für

$$f_s := f_{s,t_1} \vee \ldots \vee f_{s,t_n}$$

gilt dann $f_s > f - \varepsilon$ auf ganz $X$. Zu jedem $s \in X$ gibt es wegen $f_s(s) = f(s)$ eine Umgebung $V_s$ mit $f_s < f + \varepsilon$ auf $V_s$. Endlich viele $V_{s_1}, \ldots, V_{s_l}$ überdecken $X$. Die Funktion

$$g = f_{s_1} \wedge \ldots \wedge f_{s_l}$$

efüllt nun $g < f + \epsilon$ und $g > f - \varepsilon$ auf $X$, also $\|f - g\|_\infty < \varepsilon$. Da $f \in \mathcal{C}_\mathbb{R}(X)$ beliebig war und $g$ durch Elemente von $B$ approximiert werden kann, ist $B$ dicht in $\mathcal{C}_\mathbb{R}(X)$ und somit $A$ dicht in $\mathcal{C}(X)$, wie behauptet.

□

**Bemerkung.** Der Satz von Stone-Weierstraß lässt sich leicht auf lokal kompaktes $X$ (jeder Punkt hat eine kompakt Umgebung) erweitern. Ersetzt man im schon bewiesenen Satz "kompakt" durch "Lokal kompakt" und $\mathcal{C}(X)$ durch $\mathcal{C}_0(X)$, so bleibt er richtig. Dabei ist $\mathcal{C}_0(X)$ die Algebra der im Unendlichen verschwindenden Funktionen ($f : X \mapsto \mathbb{C}$ **"verschwindet im Unendlichen"**, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein kompaktes $K \subset X$ gibt mit $|f| < \varepsilon$ außerhalb $K$ gibt).

*Beweis der Bemerkung..* (a) 1-Punkt Kompaktifizierung von $X$:
Man fügt einen neuen Punkt zu $X$ hinzu, z.B. "$\infty$". $\tilde{X} = X \cup \{\infty\}$ ist kompakt, wenn man zur Topologie von $X$ alle Mengen $M \subset \tilde{X}$ mit $\infty \in M$ als offen hinzufügt, deren Komplement $\tilde{X} \setminus M$ kompakt in $X$ ist.

(b) Indem wir alle $f \in \mathcal{C}_0(X)$ durch $f(\infty) = 0$ stetig auf $\tilde{X}$ fortsetzen und Konstanten addieren erhalten wir alle stetigen Funktionen auf $\tilde{X}$: $\mathcal{C}(X) = \mathbb{C} \cup \mathcal{C}_0(X)$. Die Algebra $\mathbb{C} + A$ anstelle von $A$ erfüllt dann (i)–(iii) des vorgehenden Satzes, ist also dicht in $\mathcal{C}(X) = \mathbb{C} \cup \mathcal{C}_0(X)$. Hieraus folgt, daß $A$ dicht in $\mathcal{C}_0(X)$, denn $\lambda_n + f_n \to \lambda + f$ impliziert $\lambda_n \to \lambda$ und $f_n \to f$.

□

**Satz 4.3.10** (Gelfand-Naimark)**.** *Ist $A$ eine kommutative $C^*$ -Algebra mit Eins* **e***, so ist die Abbildung $a \mapsto \widehat{a}$ ein isometrischer Algebrenisomorohismus von $A$ auf $\mathcal{C}(X(A))$ und außerdem gilt $\widehat{a^*} = \overline{\widehat{a}}$.*

*Beweis.* Wie wir wissen, trennt $\widehat{A} = \{\widehat{a} \mid a \in A\}$ Punkte von $X(A)$ und verschwindet nirgends (denn $\mathbf{e}(\varphi) = 1$ für jedes $\varphi$ ). Außerdem gilt $\widehat{a^*}(\varphi) = \varphi(a^*) = \overline{\varphi(a)} = \widehat{a}(\varphi)$, $\widehat{A}$ ist also invariant unter Komplexkonjugation. Nach dem Satz von Stone-Weierstrass muss dann $\widehat{A}$ dicht in $\mathcal{C}(X(A))$ sein. Wie in den Übungen4.6.1 gezeigt, gilt für jedes $a$ mit $aa^* = a^*a$ (was hier wegen Kommutativität von $A$ stets erfüllt ist) in einer $C^*$-algebra die Gleichheit $\|a\| = \lim_{n\to\infty} \|a_n\|^{\frac{1}{n}}$, und da nach dem Gelfandschen Darstellungssatz 4.3.3 $\|a\|_\infty = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$ gilt, erhalten wir $\|\widehat{a}\|_\infty = \|a\|$, die Abbildung $a \mapsto \widehat{a}$ ist also isometrisch. Da $A$ vollständig ist, ist es dann auch $\widehat{A}$, folglich ist $\widehat{A}$ abgeschlossen in $\mathcal{C}(X(A))$, und da $\widehat{A}$ dicht in $\mathcal{C}(X(A))$ ist, muss $A = \mathcal{C}(X(A))$ gelten. □

**Definition 4.3.11.** *Seien $A$, $B$ $*$-Algebren. Ein Algebren homomorphismus (bzw. Algebrenisomorphismus) $S : A \to B$ heißt* **$*$-Algebrenhomomorphismus** *( Bzw. $*$-Algebrenisomorphismus) oder kurz $*$-Homomorphismus (bzw.* **$*$-Isomorphismus***), wenn $S$ mit der Involution verträglich ist, also $(Sa)^* = S(a^*)$ für alle $a \in A$ gilt.*

Somit sagt Satz 4.3.10 für eine kommutative $\mathcal{C}^*$- Algebra $A$ mit Eins, daß die Gelfandtransformation ein isometrischer $*$-Isomorphismus von $A$ auf $\mathcal{C}(X(A))$ ist.

## Stetiger Funktionalkalkül

Für den folgenden Funktionalkalkül benötigen wir eine Verschärfung von Proposition 4.1.6

**Satz 4.3.12.** *Sei $B$ eine $\mathcal{C}^*$-Algebra mit Eins* $\mathbf{e}$ *und $A \subset B$ eine $\mathcal{C}^*$-Unteralgebra mit* $\mathbf{e} \in A$. *Dann gilt $\sigma_A(a) = \sigma_B(a)$ für alle $a \in A$.*

*Beweis.* (i) Für selbstadjungiertes $a \in A$ gilt nach Proposition 4.3.7 (iv) $\sigma_A(a) \subset \mathbb{R}$, also $\partial\sigma_A(a) = \sigma_A(a)$ (denn der Rand ist im Grundraum $\mathbb{C}$ zu nehmen). Aus Proposition 4.1.6 folgt $\sigma_A(a) = \sigma_B(a)$.

(ii) Sei nun $a \in A$ beliebig und $\lambda \in \mathbb{C}$. Ist $\lambda - a$ in $A$ invertierbar, so auch $\overline{\lambda} - a^*$, und somit $(\lambda - a)(\overline{\lambda} - a^*)$ und $(\overline{\lambda} - a^*)(\lambda - a)$. Sind umgekehrt beide Produkte invertierbar, so hat $\lambda - a$ ein Rechtsinverses und ein Linksinverses (die wegen der Assoziativität des Produkts gleich sein müssen), und ist also invertierbar. Die Produkte haben aber die Form $|\lambda|^2 - c$ und $|\lambda|^2 - d$ mit selbstadjungierten $c$ und $d$ in $A$. Nach (i) sind diese Differenzen (und damit $\lambda - a$) genau dann in $A$ invertierbar, wenn sie es in $B$ sind. Somit gilt $\sigma_A(a) = \sigma_B(a)$.

□

Im folgenden bezeichne $\mathbf{t}$ die identische Funktion $\mathbf{t}(s) = s$, für $s \in \sigma(b)$ und $\mathbf{1}$ die konstante Funktion mit Wert 1 auf $\sigma(b)$.

**Satz 4.3.13** (Stetiger Funktionalkalkül für selbstadjungierte Elemente einer $\mathcal{C}^*$-Algebra). *Sei $B$ eine $\mathcal{C}^*$- Algebra mit Eins $\mathbf{e}$, und sei $b = b^* \in B$. Es gibt genau einen stetigen Homomorphismus*

$$\Phi_b : \mathcal{C}(\sigma(b)) \to B \ mit \ \Phi_b(\mathbf{1}) = \mathbf{e},\ \Phi_b(\mathbf{t}) = b$$

**Definition 4.3.14.** *Man nennt $\Phi$ den* **stetigen Funktionalkalkül** *und bezeichnet $\Phi_b(f)$ mit $f(b)$, was durch die Tatsache motiviert ist, daß $\Phi_b(p) = p(b)$ für jedes Polynom $p$ gilt und aus $p_n \to f$, wegen der Stetigkeit von $\Phi$ auch $p_n(b) \to \Phi_b(f)$ folgt. (Damit ist auch schon klar, daß $\Phi_b$ eindeutig bestimmt ist.)*

**Satz 4.3.15** (Fortsetzung von Satz 4.3.13). *Es gelten*

*(a)* $\|f(b)\| = \|f\|_\infty$ $(= \sup_{\lambda\in\sigma(b)} |f(\lambda)|)$,

*(b)* $f(b)^* = \overline{f(b)}$, *insbesondere*

*(c)* $f(b)^* = f(b) \Longleftrightarrow f$ *ist reellwertig* ,

*(d) Alle* $f(b),\ f \in \mathcal{C}(\sigma(b))$, *sind normal* $(f(b)^*f(b) = f(b)f(b)^*)$

*(e)* $\sigma(f(b)) = f(\sigma(b))$.

*(f) Falls $B = B(H)$, wo $H$ ein Hilbertraum ist gilt außerdem*

- *(i) Für $g \geq 0, g \in \mathcal{C}(\sigma(b))$ ist $g(b)$ ein positiver Operator (d.h. $(\,g(b)x \mid x) \geq 0\ \forall x \in H$.*
- *(ii) Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ und $b\,x = \lambda x$ für ein $x \in H$, so folgt $g(b)x = g(\lambda)x$, für alle $g \in \mathcal{C}(\sigma(b))$.*

*Beweis der Sätze 4.3.13 und 4.3.15..* (i) Zur Existenz und Eindeutigkeit von $\Phi_b$. Sei $A$ die von $\mathbf{e}$ und $b$ erzeugte Unteralgebra von $B$. Die algebraisch von $\mathbf{e}$ und $b$ erzeugte Algebra $A_0$ besteht aus den Polynomen $p(b) = \sum_{k=0}^n \alpha_k b^k,\ \alpha_k \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}$, wobei $b^0$ für $\mathbf{e}$ steht. $A_0$ ist offensichtlich kommutativ und wegen $B^* = b$ auch $*$-invariant. Der Abschluß $A$ ist also eine kommutative $\mathcal{C}^*$-Algebra. Wenn wir gmäß 4.3.3 (e) $X(A)$ vermöge der Abbildung $\varphi \mapsto \varphi(b)$ idenzifizieren, so ist wegen Satz 4.3.10 die Gelfandtransformation $\mathcal{G} : a \mapsto \widehat{a}$ ein isometrischer $*$-Isomorphismus von $A$ auf $\mathcal{C}(\sigma(b))$ mit $\widehat{\mathbf{e}} = \mathbf{1}$, $\widehat{b} = \mathrm{Id}_{\sigma(b)} =: \mathbf{t}$, also $\mathcal{G}^{-1}$ ein isometrischer $*$-Isomorphismus von $\mathcal{C}(\sigma(b))$ auf $A \subset B$. Damit ist die Existenz von $\Phi_b$ gezeigt. Da $\Phi_b$ ein Algebrenmorphismus ist, ist es auf $A_0$ eindeutig bestimmt und wegen seiner Stetigkeit auch auf dem Abschluß $A$.

(ii) Wegen $f(b) = \Phi_b(f) = \mathcal{G}^{-1}(f)$ sind die Eigenschaften (a)–(c) offenbar erfüllt, ebenso (d), da $A$ eine kommutative $\mathcal{C}^*$-Algebra ist. Aus 4.3.3 (c) und (e) wissen wir für ein $a \in A$, daß $\sigma(a) = \widehat{a}(\sigma(b))$ gilt, also $\sigma(f(b)) = \widehat{f(b)}(\sigma(b)) = \mathcal{G} \circ \mathcal{G}^{-1}(f)(\sigma(b)) = f(\sigma(b))$, wie in (e) behauptet.

(iii) Sei nun $B = B(H)$. Für $g \in \mathcal{C}(\sigma(b))^+$ (d.h. $g \in \mathcal{C}(\sigma(b))$ und $g \geq 0$) und $x \in H$ gilt wegen $g = g^{\frac{1}{2}} g^{\frac{1}{2}}$ und (c) $(g(b)x|x) = (g^{\frac{1}{2}} g^{\frac{1}{2}} x|x) = (g^{\frac{1}{2}} x | g^{\frac{1}{2}} x) \geq 0$, also gilt (f)(i). Ist $b\,x = \lambda x$ für ein $x \in H$, so folgt $p(b)x = p(\lambda)x$ für alle Polynome $p$, also aus Stetigkeitsgründen auch $g(b)x = g\lambda)x$, für alle $g \in \mathcal{C}(\sigma(b))$, d.h. (f)(ii) gilt.

□

Der Funktionalkalkül für normale Elemente bedarf nur einer leichten Modifikation des selbstadjungierten Falls.

Wir benötigen folgendes Analogon zu Satz 4.3.3 (e).

**Proposition 4.3.16.** *Sei $B$ eine $\mathcal{C}^*$-Algebra mit Eins $\mathbf{e}$, sei $b \in B$ normal und $A$ die von $\mathbf{e}$, $b$, $b^*$ erzeugte abgeschlossene Unteralgebra von $B$. Dann ist $A$ eine kommutative $\mathcal{C}^*$-Algebra und $\varphi \mapsto \varphi(b)$ ein Homöomorphismus von $X(A)$ und $\sigma(b)$. Identifiziert man $X(A)$ und $\sigma(b)$ vermöge dieser Abbildung, so gilt $\widehat{\mathbf{e}} = \mathbf{1}$, $\widehat{b} = \mathbf{t} = \mathrm{Id}_{\sigma(b)}$, $\widehat{b^*} = \overline{\mathbf{t}} = \overline{\mathrm{Id}_\sigma b}$.*

*Beweis.* Die von $\mathbf{e}$, $b$, $b^*$ (algebraisch) erzeugte Algebra besteht aus allen Polynomen $p(b, b^*)$ (z.B. $\alpha\mathbf{e} + \alpha_2 b^* bb * + \alpha_3 bbb^* bb^* + \ldots$ eine endliche Summme). Da $b$ normal ist, ist die Algebra kommutativ, außerdem $*$-invariant, Ihr Abschluß $A$ also eine kommutative $\mathcal{C}^*$-Unteralgebra von $B$. Daß $\varphi \mapsto \varphi(b)$ ein Homöomorphismus von $X(A)$ auf $\sigma(b)$ ist, folgt nun wie im Beweis von Satz 4.3.3(e). Lediglich die Injektivität musss neu bewiesen werden. Gilt $\varphi(b) = \psi(b)$, so folgt wegen Satz 4.3.7 $\varphi(b^*) = \overline{\varphi(b)}$, $\overline{\psi(b)} = \psi(b^*)$, also folgt wegen Satz 4.3.7 $\varphi = \psi$ auf allen Polynomen $p(b, b^*)$ und somit aus Stetigkeitsgründen auf ganz $A$. Wieder wie im Beweis von Satz 4.3.3(e) ergibt sich nun $\widehat{\mathbf{e}} = \mathbf{1}$ und $\widehat{b} = \mathrm{Id}_{\sigma(b)}$, somit auch $\widehat{b^*} = \overline{\mathrm{Id}_{\sigma(b)}}$. □

**Proposition 4.3.17.** *Für normales $b \in B(H)$ und $x \in H$ gilt $\|b^*x\| = \|bx\|$. Im Fall $b\,x = \lambda x$ mit einem $\lambda \in \mathbb{C}$ folgt hieraus $b^*\,x = \overline{\lambda}x$. Eigenvektoren von $b$ zum Eigenwert $\lambda$ sind Eigenvektoren von $b^*$ zum Eigenwert $\overline{\lambda}$.*

*Beweis.* Es gilt

$$\|b^*x\|^2 = (b^*x \mid b^*x) = (x \mid bb^*x) = (x \mid b^*bx) = (bx \mid bx) = \|bx\|^2.$$

Mit $b$ ist auch $b - \lambda$ normal. Im Fall $b\,x = \lambda x$ folgt deshalb $0 = \|(b-\lambda)x\| = \|(b^* - \overline{\lambda})x\|$ also $b^*x = \overline{\lambda}x$. □

Sei wieder $\mathbf{t} = \mathrm{Id}_{\sigma(b)}$ die identische Funkton $\mathbf{t}(z) = z$ auf $\sigma(b)$ und $\mathbf{1}$ die konstante Funktion 1 auf $\sigma(b)$.

**Satz 4.3.18** (Stetiger Funktionalkalkül für normale Elemente einer $C^*$-Algebra mit Eins.)**.** *Sei $B$ eine $C^*$-Algebra mit Eins $\mathbf{e}$ und $b \in B$ normal, d.h. $b^*b = bb^*$. Es gibt genau einen stetigen Isomorphismus $\Phi_b : \mathcal{C}(\sigma(b)) \to B$ mit*

$$\Phi_b(\mathbf{1}) = \mathbf{e},\ \Phi_b(\mathbf{t}) = b,\ \Phi_b(\overline{\mathbf{t}}) = b^*.$$

*Man nennt $\Phi_b$ den stetigen Funktionalkalkül von $b$ und schreibt für $f \in \mathcal{C}(\sigma(b))$ einfach $\Phi_b(f) = f(b)$. Es gilt* *(a)* $\|f(b)\| = \|f\|_\infty$,

*(b)* $f(b)^* = \overline{f(b)}$, *insbesondere*

*(c)* $f(b)^* = f(b) \Longleftrightarrow f$ *ist reellwertig* .

*(d)* *Alle* $f(b),\ f \in \mathcal{C}(\sigma(b))$ *sind normal*

*(e)* $\sigma(f(b)) = f(\sigma(b))$.

*(f)* *Falls* $B = B(H)$, *wo* $H$ *ein Hilbertraum ist gilt außerdem*

  *(i)* *Für* $g \geq 0, g \in \mathcal{C}(\sigma(b))$ *ist* $g(b)$ *ein positiver Operator*

  *(ii)* *Ist* $\lambda \in \mathbb{C}$ *und* $b\,x = \lambda x$ *für ein* $x \in H$, *so folgt* $g(b)x = g(\lambda)x$, *für alle* $g \in \mathcal{C}(\sigma(b))$.

*Beweis.* Der Beweis verläuft wie im selbstadjungierten Fall, nur daß anstelle von Polynomen $p(t)$ mit Bild $p(b)$ nun Polynome $p(t, \bar{t})$ mit Bild $p(b, b^*)$ benutzt werden und anstelle von Satz 4.3.3 nun Proposition 4.3.16 benutzt wird. (Der Grund dafür: Im Fall $b \neq b^*$ brauchen die Polynome $p(t)$ nicht dicht in $\mathcal{C}(\sigma(b))$ zu sein.)

Zu (f)(ii): Ist $f(t) = \lim p_n(t, \bar{t})$ so folgt $f(b) = \lim p_n(b, b^*)$, also $f(b)x = \lim p_n(b, b^*)x = \lim p_n(\lambda, \overline{\lambda})x = f(\lambda)x$. □

## Ein Spektralsatz für normale Operatoren auf einem Hilbertraum

**Definition 4.3.19.** *Sei* $H$ *ein Hilbertraum und sei* $A$ *eine abgeschlossene Unteralgebra von* $B(H)$, *die die Identität von* $H$, *das Einselement von* $B(H)$ *enthält. Ein abgeschlossener Unterraum* $U \neq \{0\}$ *von* $H$ *heißt zyklisch für* $A$, *wenn es ein* $x \in H$ *gibt mit* $U = \overline{Ax}$. *Ein solches* $x$ *heißt zyklischer Vektor.*

Ist $T \in B(H)$ selbstadjungiert, $T^* = T$, und dann ist die von $\mathrm{Id}_H$ und $T$ erzeugte abgeschlossene Unteralgebra $A$ von $B(H)$ $*$-invariant und ein für $A$ zyklischer Unterraum $U$ wird auch einfach zyklisch für $T$ genannt. Ist $x \in H$ zyklisch für $T$ so stimmen offenbar $\overline{Ax}$ und $U = \overline{\mathrm{Lin}\{x, Tx, T^2x, \ldots\}}$ überein, da die Polynome in $T$ dicht in $A$ sind.

Ist $T$ normal, also $TT^* = T^*T$, dann betrachtet man die von $\mathrm{Id}_H$, $T$ und $T^*$ erzeugte abgeschlossene Unteralgebra und spricht von für $T$ und $T^*$ zyklischen Unteräumen. **Bemerkung.** Es ist bequem, einen für $A$ zyklischen Unterraum $U$ mit zyklischem Vektor $x \in H$ dann mit $H_x$ zu bezeichnen. Offenbar ist $H_x$ invariant unter $A$ (d.h. $AH_x \subset H_x$), und es ist $x \in H_x$. Ist $A$ eine $*$-abgeschlossene Unteralgebra von $B(H)$ so ist auch $H_x^\perp$ invariant unter $A$. Mit dem Zornschen Lemma kann man sich eine maximale Menge paarweiser orthogonaler zyklischer Unterräume $H_x$ von $H$ verschaffen. Sei $X$ die Menge der entsprechenden Vektoren $x$ aus $H$. Dann ist $\sum_{x \in X} H_x$ dicht in $H$ und $H$ ist die Hilbertraumsumme

$$H = \oplus_{x \in X} H_x := \left\{ \xi \mid \xi = \sum_{x \in X} \xi_x \text{ mit } \xi_x \in H_x, \sum_{x \in X} \|\xi_x\|^2 < \infty \right\}.$$

Diese Bemerkung zeigt:

**Satz 4.3.20.** *Sei $H$ ein Hilbertraum $T \in B(H)$ normal und sei $A$ die von $T$, $T^*$ und der Identität von $H$ erzeugte abgeschlossene Unteralgebra von $B(H)$. Es gibt eine orthonormale Menge $X \subset H$ (d.h. die Elemente von $X$ sind von Norm 1 und paarweise orthogonal), so daß mit $H_x = \overline{Ax}$ der Raum $H$ die direkte Hilbertraumsumme der $H_x$ ist.*

Wegen $H_x = \overline{Ax}$ gilt $TH_x \subset H_x$, insbesondere wirkt $T$ auf $H_x$ wie ein gewöhnlicher Multiplikationsoperator, genauer gesagt gilt die folgende

**Proposition 4.3.21.** *Unter den obigen Voraussetzungem gibt es ein endliches positives Borelmaß $\mu_x$ auf $\sigma(T)$ und einen isometrischen Isomorphismus*

$$J : L^2(\sigma(T), \mu_x) \to H_x,$$

*so daß*

$$J^{-1}TJ = M_{\mathbf{t}}$$

*ist, wobei $M_{\mathbf{t}}$ den mit der identischen Abbildung definierten Multiplikationsoperator auf $L^2(\sigma(T), \mu_x)$ bezeichnet:*

$$M_{\mathbf{t}}g(y) = y \cdot g(y) \text{ für } g \in L^2(\sigma(T), \mu_x),\ y \in \sigma(T).$$

*Es gilt auch*

$$J^{-1}T^*J = M_{\overline{\mathbf{t}}}.$$

*Beweis.* Sei $R \leftrightarrow r = \mathcal{G}(R)$ (d.h. $r = \widehat{R}$)) die bijektive Zuordnung durch die Gelfandtransformation (gemäß Gelfand-Naimark 4.3.10) zwischen $A$ und $\mathcal{C}(\sigma(T))$, wobei wir $X(A)$ mit $\sigma(T)$ gemäß 4.3.16 identifiziert haben.

Die Abbildung $p : r \mapsto (\, Rx \mid x)$ ist ein positives lineares Funktional auf $\mathcal{C}(\sigma(T))$, lässt sich also (nach dem Rieszschen Darstellungssatz aus der Maßtheorie [5, (13.33)]) in der Form

$$p(r) = (\, Rx \mid x) = \int_{\sigma(T)} r \, d\mu_x$$

schreiben, wobei $\mu_x$ ein eindeutig bestimmtes positives endliches Borel-Maß auf $\sigma(T)$ ist. Bezüglich dieses Maßes ergibt sich für die $L^2$-norm $\|r\|_2$ eines Elements $r \in \mathcal{C}(\sigma(T))$

$$\|r\|_2^2 = \int \overline{r}r \, d\mu_x = p(\overline{r}r) = (R^*Rx|x) = \|Rx\|^2.$$

Die Abbildung $j : r \mapsto Rx$ von $\mathcal{C}(\sigma(T))$ auf $Ax \subset H$ ist also isometrisch, außerdem linear. Da $\mathcal{C}(\sigma(T))$ bzw. $Ax$ dicht in $L^2(\sigma(T), \mu_x)$ bzw. $H_x$ ist, ist die stetige Fortsetzung $J$ von $j$ ein isometrischer Isomorphismus von $L^2(\sigma(T), \mu_x)$ auf $H_x$. Für $r \in \mathcal{C}(\sigma(T))$ gilt

$$J(\mathbf{t}r) = TRx = TJr, \tag{4.3.22}$$

also da $\mathcal{C}(\sigma(T))$ in $L^2(\sigma(T), \mu_x)$ dicht ist,

$$JM_{\mathbf{t}} = TJ \text{ oder } J^{-1}TJ = M_{\mathbf{t}} \tag{4.3.23}$$

wo $M_{\mathbf{t}}$ der Multiplikationsoperator $g \mapsto \mathbf{t}g$ auf $L^2(\sigma(T), \mu_x)$ ist. Da wir $X(A)$ mit $\sigma(T)$ identifiziert haben, ist nach (e) des Gelfandschen Darstellungssatzes $\mathbf{t} = \widehat{T}$ und $\overline{\mathbf{t}} = \widehat{T^*}$ mit der identischen Abbildung $\mathbf{t}(\lambda) = \lambda$ auf $\sigma(T)$ also,

$$\begin{aligned} &(M_{\mathbf{t}}g)(y) = \mathbf{t}(y)g(y) = yg(y) \text{ und} \\ &(M_{\overline{\mathbf{t}}}g)(y) = \overline{\mathbf{t}}(y)g(y) = \overline{y}g(y),\ y \in \sigma(T),\ g \in L^2(\sigma(T), \mu_x) \overset{J}{=} H_x \end{aligned} \tag{4.3.24}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. □

**Bemerkung.** Die Wirkung von $T$ auf $H_x$ entspricht der Wirkung von $M_{\mathbf{t}}$ auf $L^2(\sigma(T), \mu_x)$, hängt also von $\mu_x$ ab. Der Träger von $\mu_x$ (d.h. das Komplement der gößten offenen $\mu_x$-Nullmenge) kann ganz $\sigma(T)$ sein, muß aber nicht.

**Beispiel 4.3.25.** *Ist $x \in H$ ein Eigenvektor von $T$ zum Eigenwert $\lambda$, so gilt nach Satz 4.3.13 (f)(ii) für $r \in \mathcal{C}(\sigma(T))$; $r(T)x = r(\lambda)x$, nach Definition von $\mu_x$*

$$\int_{\sigma(T)} r\, d\mu_x = (\, Rx \mid x) = (\, r(T)x \mid x) = r(\lambda)\|x\|^2.$$

*Somit ist $\mu_x = \|x\|^2\delta_\lambda$, wo $\delta_\lambda$ das Dirac-Maß im Punkt $\lambda$, also $\sigma(T) \setminus \{\lambda\}$ eine $\mu_x$-Nullmenge ist. Zwei Funktionen auf $\sigma(T)$ sind genau dann äquivalent, wenn sie an der Stelle $\lambda$ denselben Funktionswert annehmen. $L^2(\sigma(T), \mu_x)$ ist also 1-dimensional (wie es auch sein muß , denn es ist zu dem 1-dimensionalen Raum $H_x = \overline{Ax} = \mathbb{C}$ isomorph).*

Da das Maß $\mu_x$ passend zu $H_x$ konstruiert wurde, also von $x \in X$ abhängt, bezeichnen wir es mit $\mu_x$ . Nach Konstruktion (Satz 4.3.20) gilt

$$H \cong \bigoplus_{x \in X} L^2(\sigma(T), \mu_x)$$

oder, wenn wir mit $\mu$ das Maß $\sum_{x\in X} \mu_x$ auf den Borelmengen von $\coprod_{x\in X} \sigma(T)$ bezeichnen, $H \cong L^2(\mu)$ (isometrische Isomorphie). Hier bezeichnet $\coprod_{x\in X} \sigma(T)$ die disjunkte Vereinigung von Kopien von $\sigma(T)$. Somit ergibt sich

**Satz 4.3.26** (Spektralsatz I für normale Operatoren)**.** *Es gibt einen isometrischen Isomorphismus von $H$ auf $L^2(\mu)$, der $T$ in den Multiplikationsoperator mit der Funktion $\mathbf{t}(y) = y$ transformiert.*

**Bemerkung.** Hier erscheinen im allgemeinen mehrere (viele) Kopieen von $\sigma(T)$ und die Funktion $\mathbf{t}$ ist auf jeder dieser Kopieen die Identität. Der Beweis des Spektralsatzes liefert auch eine simultane "Diagonalisierung" aller Operatoren $S \in A$. Ersetzt man nämlich in 4.3.22 und 4.3.23 $T$ und $t$ durch $S$ und $s := \widehat{S}$, so ergibt sich $J^{-1}SJ = M_s$ (der durch Multiplikation mit $s$ definierte Operator), für $S \in A$. Identifizert man $L^2(\mu)$ mit $H$ vermöge $J$ ( und somit $B(H)$ mit

$B(L^2(\mu))$ vermöge $S \mapsto J^{-1}SJ$), so ist der Homomorphismus $S \mapsto M_s$ gerade der stetige Funktionalkalkül von $T \triangleq M_t$).

Natürlich kann man $L^2$-Funktionen auch mit beschränkten meßbaren Funktionen multiplizieren, d.h. der Spektralsatz impliziert die Existenz des Borel-meßbaren Funktionalkalküls.

**Satz 4.3.27** (Borelscher Funktionalkalkül)**.** *Sei $H$ ein Hilbertraum, $T \in B(H)$ normal, und sei $\mathcal{B}_b(\sigma(T))$ die Banachalgebra der beschränkten Borelschen (= Borel-meßbaren) Funktionen auf $\sigma(T)$ mit der Supremumsnorm $\|\,.\,\|_\infty$. Dann gibt es genau einen stetigen Homomorphismus $\tilde{\Phi}_T : \mathcal{B}_b(\sigma(T)) \to B(H)$ mit*

*(1) $\tilde{\Phi}_T(\mathbf{1}) = \mathrm{Id}_H,\ \tilde{\Phi}_T(\mathbf{t}) = T,\ \tilde{\Phi}_T(\overline{\mathbf{t}}) = T^*$, wo $\mathbf{t}$ die identische Funktion $\mathbf{t}(s) = s$ auf $\sigma(T)$ ist.*

*(2) Sind $f_n \in \mathcal{B}_b(\sigma(T))$ mit $\sup_n \|f_n\|_\infty =: C < \infty$ und $f_n \to f$ punktweise auf $\sigma(T)$, so folgt $(\tilde{\Phi}_T(f_n)x|y) \to (\tilde{\Phi}_T(f)x|y)\ \forall x, y \in H$.*

Man nennt $\tilde{\Phi}_T$ den Borelschen Funktionalkalkül von $T$ und bezeichnet $\tilde{\Phi}_T(f)$ mit $f(T)$ für $f \in \mathcal{B}_b(\sigma(T))$. Es ist klar, daß $\tilde{\Phi}_T$ eine Fortsetzung des stetigen Funktionalkalküls $\Phi$ aus 4.3.18 ist.

**Satz 4.3.28** (Fortsetzung von 4.3.27)**.** *Es gelten*

*(a) $\|f(T)\| \le \|f\|_\infty$ $(= \sup_{\lambda\in\sigma(T)} |f(\lambda)|)$,*

*(b) $f(T)^* = \overline{f}(T)$, insbesondere*

*(c) $f(T)^* = f(T)$ für reellwertiges $f$.*

*(d) Alle $f(T), f \in \mathcal{B}_b(\sigma(T))$ sind normal $(f(T)^*f(T) = f(T)f(T)^*)$,*

*(e) $\sigma(f(T)) \subset \overline{f(\sigma(T))}$ (Hier bezeichnet $\overline{f(\sigma(T))}$ den topologischen Abschluß von $f(\sigma(T))$.)*

*(f) (i) Für $g \ge 0,\ g \in \mathcal{B}_b(\sigma(T))$ ist $g(T)$ ein positiver Operator.*

*(ii) Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ und $Tx = \lambda x$ für ein $x \in H$, so folgt $g(T)x = g(\lambda)x,\ \forall g \in \mathcal{B}_b(\sigma(T))$.*

*Beweis.* Eindeutigkeit: Nach Satz 4.3.14 ist $\tilde{\Phi}_T$ auf $\mathcal{C}(\sigma(T))$ durch die Voraussetzungen (ohne (2)) eindeutig bestimmt. Um die Eindeutigkeit von $\tilde{\Phi}_T$ auf ganz $\mathcal{B}_b(\sigma(T))$ zu erhalten, genügt es die Eindeutigkeit von $\tilde{\Phi}_T$ auf den charakteristischen Funktionen Borelscher Mengen zu zeigen, denn dies impliziert die Eindeutigkeit auf ihren Linearkombinationen, den Borelschen Treppenfunktionen, woraus wegen (2) die Eindeutigkeit von $\tilde{\Phi}_T$ auf ganz $\mathcal{B}_b(\sigma(T))$ folgt, denn zu jedem $f \in \mathcal{B}_b(\sigma(T))$ gibt es eine Folge von Treppenfunktionen $f_n$, die (sogar gleichmäßig) gegen $f$ konvergiert.

Sei $\Sigma$ das System aller Borelschen Teilmengen $B$ von $\sigma(T)$, für die $\tilde{\Phi}_T(\chi_B)$ eindeutig bestimmt ist. Ist $O \subset \sigma(T)$ (relativ) offen, so gibt es $f_n \in \mathcal{C}(\sigma(T))$

mit $0 \le f_n \le 1$ und $f_n(t) \to \chi_B(t)$, $\forall t \in \sigma(T)$, so daß wegen (2) $O \in \Sigma$ folgt. Sind $E, F \in \Sigma$, so gilt wegen $\chi_{E\cup F} = \chi_E \chi_F$ und $\chi_{\sigma(T)\setminus F} = \mathbf{1} - \chi_F$ auch $E \cup F$, $\sigma(T) \setminus E \in \Sigma$, da $\tilde{\Phi}_T$ linear und multiplikativ ist. Sind $F_k \in \Sigma$, $k \in \mathbb{N}$, paarweise disjunkt, so gilt $\chi_{\cup_1^\infty F_k} = \lim_n \sum_1^n \chi_{F_k}$, woraus wegen (2) $\chi_{\cup_1^\infty F_k} \in \Sigma$ folgt. Somit ist $\Sigma$ eine $\sigma$-Algebra, die alle offenen Mengen von $\sigma(T)$ und folglich die Borelmengen von $\sigma(T)$ enthält.

Existenz: Identifiziert man wie in den Zeilen vor diesem Satz $B(H)$ mit $B(L^2(\mu))$ vermöge $S \mapsto J^{-1}SJ$, so erfüllt der Homomorphismus $s \mapsto M_s$ das Verlangte: er bildet $\mathbf{1}$ auf $\mathrm{Id}_H$ ab sowie $\mathbf{t}$ auf $M_{\mathbf{t}} \cong T$, $\bar{\mathbf{t}}$ auf $M_{\bar{\mathbf{t}}} \cong T^*$ ab und liefert bei (2) für $x \in L^2(\mu) \cong H$ wegen $|f_n x| \le C|x|$ und $f_n x \to fx$ für $x \in L^2(\mu)$ aufgrund des Lebesgueschen Satzes von der dominierten Konvergenz die stärkere Schlußfolgerung $\|M_{f_n}x - M_f x\| \to 0$, $\forall x \in L^2(\mu)$.

Eigenschaften: (a) folgt aus $\|fx\|_2 \le \|f\|_\infty \|x\|_2$, $\forall x \in L^2(\mu)$, (b) und somit auch (c) aus $(fx|y) = \int fx\overline{y}\,d\mu = \int x\overline{\overline{f}y}\,d\mu = (x|\overline{f}y)$, (d) aus der Kommutativität von $\mathcal{B}_b(\sigma(T))$, (e) aus der Tatsache, daß $\overline{f(\sigma(T))} = \sigma_{\mathcal{B}_b}(f)$ gilt (Übung4.6.6) und das Spektrum eines Elements bei einem unitalen Homomorphismus höchstens kleiner werden (oder gleich bleiben) kann. (f)(i) zeigt man wie beim stetigen Funktionalkalkül. Zu (f)(ii): Ist $Ty = \lambda y$, $y \neq 0$ und $y = \sum y_x$ mit $y_n \neq 0$, $y_x \in H$, $\|y\|^2 = \sum \|y_x\|^2$, so muss für jedes dieser $y_x$ $Ty_x = \lambda y_x$ gelten, also $\mathbf{t}y_x = \lambda y_x$ $\mu_x$-fastüberall, also $(\mathbf{t} - \lambda)y = 0$ $\mu_x$ – fast überall. Da $\mathbf{t} - \lambda$ auf $\sigma(T) \setminus \{\lambda\}$ ungleich null ist, muss $\{y_x \neq 0\} \setminus \{\lambda\}$ eine $\mu_x$-Nullmenge sein. Da $\|y_x\|_2 \neq 0$, müssen $y_x(\lambda) \neq 0$ und $\mu_x(\{\lambda\}) > 0$ gelten, wir können also $y_x = y_x(\lambda)\chi_{\{\lambda\}}$ annehmen. Für $g \in \mathcal{B}_b(\sigma(T))$ folgt $gy_x = g(\lambda)y_x(\lambda)\chi_{\{\lambda\}} = g(\lambda)y_x$. Insgesamt ergibt sich also $gx = \sum_x g(\lambda)y_x = g(\lambda)x$. □

**Bemerkung.** Möcht man die oben benutzte Identifikation $J$ von $L^2(\mu)$ mit dem (isometrisch isomorphen) Hilbertraum $H$ und folglich von $B(H)$ mit $B(L^2(\mu))$ vermöge $S \mapsto J^{-1}SJ$ nicht nutzen, sondern auf dem ursprünglichen Hilbertraum $H$ bleiben, muss man lediglich mit $J^{-1}$ bzw. $S \mapsto JSJ^{-1}$ zurücktransformieren. Es gilt dann $\tilde{\Phi}_T(F) = JM_f J^{-1}$ für $f \in \mathcal{B}_b(\sigma(T))$. Die Eigenschaften (a)–(f) bleiben sämtlich erhalten.

## 4.4 Integration bezüglich einem Spektralmaß

Zur Vorbereitung des zweiten Spektralsatzes benötigen wir den Begriff des Spektralmaßes.

**Definition 4.4.1.** *Sei $\mathfrak{A}$ eine $\sigma$-Algebra auf einer nichtleeren Menge $\Delta$ und sei $H$ ein Hilbertraum. Eine Abbildung $E : A \mapsto E(A)$ von $\mathfrak{A}$ in die Menge der orthogonalen Projektoren von $H$ heißt ein ($B(H)$-) Projektormaß oder ($B(H)$-)* **Spektralmaß** *auf $(\Delta, \mathfrak{A})$, wenn gilt:*

*(a)*

$$E(\emptyset) = 0,\ E(\Delta) = \mathrm{Id}_H$$

*(b)*

$$E(A \cap B) = E(A)E(B)\, \forall A, B \in \mathfrak{A}$$

*(c) für ein Folge von paarweise disjunkte $A_n \in \mathfrak{A}$ gilt*

$$E(\cup_1^\infty A_n) = \sum_1^\infty E(A_n)$$

*im Sinn der schwachen (äquivalent der starken) Konvergenz von Operatoren.*

Man kann zeigen, daß (b) ein Folge von (a) und (c) ist, siehe Übung 4.6.7. Gilt für ein $A \in \mathfrak{A}$: $E(A) = \mathrm{Id}_H$ (also $E(\Delta \setminus A) = 0$), so sagt man $A$ **trägt** $E$ (oder $E$ **wird von** $A$ **getragen**).

Ist $\Delta$ ein toplogischer Raum und $\mathfrak{A}$ die $\sigma$-Algebra der Borelschen Mengen von $\Delta$, wird $E$ auch als Borelsches Projektormaß bzw. als **Borelsches Spektralmaß** auf $\Delta$ bezeichnet.

**Beispiel und Definition 4.4.2.** *Ist $T \in B(H)$ normal, $\Delta = \sigma(T)$ und $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ die $\sigma$-Algebra der Borelmengen, so ist nach dem letzten Satz 4.3.27 $E : A \mapsto \tilde{\Phi}(\chi_A) = \chi_A(T)$ wegen $\chi_A^2 = \chi_A = \overline{\chi_A}$ ein Spektralmaß auf $\Delta, \mathfrak{A}$. Man nennt es das zu $T$ gehörige Spektralmaß oder kurz* **Spektralmaß von** $T$.

Analog wie bei skalaren Maßen lässt sich auch bei Spektralmaßen ein Integral für beschränkte $\mathfrak{A}$-messbare Funktionen definieren. Sind $\Delta$, $\mathfrak{A}$ $H$, $E$ wie in Definition 4.4.1 und ist $g = \sum_1^n \alpha_i \chi_{A_i}$, wo $\alpha_i \in \mathbb{C}$, $A_i \in \mathfrak{A}$, eine $\mathfrak{A}$-Treppenfunktion auf $\Delta$, so ist das elementare Integral

$$\mathrm{I}g := \sum_1^n \alpha_i E(A_i) \in B(H)$$

wohldefiniert, also von der gewählten Darstellung von $g$ als $\mathfrak{A}$-Treppenfunktion unabhängig, und außerdem linear sowie wegen $(E(A)E(B) = E(A \cap B))$ auch multiplikativ. Ferner gilt

$$(\mathrm{I}g)^* = \sum_1^n \overline{\alpha}_i E(A_i) = \mathrm{I}(\sum_1^n \overline{\alpha}_i \chi_{A_i}) = \mathrm{I}(\overline{g}).$$

Somit ist $\mathrm{I} : g \mapsto \mathrm{I}g$ ein$*$-Homomorphismus. Ist $x \in H$ und $\sum_1^n \alpha_i \chi_{A_i}$ eine Darstellung von $g$ mit paarweise disjunkten $A_i$, so ergibt sich

$$\begin{aligned}\|(\mathrm{I}g)x\|^2 &= \|\sum_1^n \alpha_i E(A_i)x\|^2 = \sum_1^n |\alpha_i|^2 \|E(A_i)x\|^2 \le (\sup_i |\alpha_i|^2) \sum_1^n \|E(A_i)x\|^2 \\ &= \|g\|_\infty \sum_1^n \|E(A_i)x\|^2 = \|g\|_\infty \|E(\cup_1^n A_i)x\|^2 \le \|g\|_\infty \|x\|^2\end{aligned}$$

(dabei zweimal den Satz von Pythagoras benutzt), also

$$\|\mathrm{I}g\| \le \|g\|_\infty .$$

Da die $\mathfrak{A}$-Treppenfunktionen bezüglich $\| \; \|_\infty$ dicht in den beschränkten $\mathfrak{A}$-messbaren Funktionen $\mathcal{A}_b$ liegen, lässt sich $I$ stetig auf $\mathcal{A}_b$ fortsetzen. Die Fortsetzung sei mit

$$\int . \, dE : f \mapsto \int f \, dE \quad (\text{oder} \int f(\lambda) \, dE(\lambda), \int_\Delta f \, dE)$$

bezeichnet, sie ist dann ein stetiger $*$-Homomorphismus von $\mathcal{A}_b$ nach $B(H)$ mit Norm $\le 1$. Es gilt $\int \mathbf{1} \, dE = \int \chi_\Delta \, dE = E(\Delta) = \mathrm{Id}_H$, d.h. der Homomorphismus ist unital.

**Satz 4.4.3.** *Sei $H$ ein Hilbertraum Und $E$ ein $B(H)$-Spektralmaßauf $(\Delta, \mathfrak{A})$, wie in Definition 4.4.1, und sei $(\mathcal{A}_b, \| \, . \, \|_\infty)$ die Banach-Algebra der beschränkten $\mathfrak{A}$-messbaren Funktionen auf $\Delta$. Es gilt:*

*(a) Das Integral $f \mapsto \int f \, dE$ von $\mathcal{A}_b$ nach $B(H)$ ist ein unitaler $*$-Homomorphismus mit Norm $\le 1$. Insbesondere ist $\int f \, dE$ für reelles $f$ selbstadjungiert und für $f \ge 0$ ein positiver Operator.*

*(b) Für $x, y \in H$ ist die Abbildung $A \mapsto (E_A x \mid y)$ von $\mathfrak{A}$ nach $\mathbb{C}$, wegen $E(\emptyset) = 0$ und $E(\Delta)$ ein komplexes Maß $\mu_{x,y}$ auf $(\Delta, \mathfrak{A})$. Es gilt*

$$\left( \left( \int f \, dE \right) x \mid y \right) = \int f \, d\mu_{x,y} \quad \forall f \in \mathcal{A}_b, \; x, y \in H. \tag{4.4.4}$$

*(c) Für eine Folge $f_n \in \mathcal{A}_b$ mit $\sup_n \|f_n\|_\infty = C < \infty$ und $f_n \to f$ punktweise auf $\Delta$ gilt*

$$\left( \left( \int f_n \, dE \right) x \mid y \right) \to \left( \left( \int f \, dE \right) x \mid y \right) \quad \forall x, y \in H$$

*(sogar in der Norm von $H$: $(\int f_n \, dE) \, x \to \int f \, dE \, x, \quad \forall x \in H$).*

*(d) Definiert man das Integral über eine Teilmenge $B$ wie üblich durch $\int f \, dE = \int \chi_B f \, dE$, für $f \in \mathcal{A}_b$, so gilt:*

*(i) Ist $B$ eine ($E$-)Nullmenge (d.h. $E(B) = 0$), so folgt*

$$\int_B f \, dE = 0 \quad \forall f \in \mathcal{A}.$$

*(ii) wird $E$ von $B$ getragen (d.h. $E(B) = \mathrm{Id}_H$), so folgt*

$$\int f \, dE = \int_B f \, dE \quad \forall f \text{ mit } \chi_B f \in \mathcal{A}.$$

**Bemerkung.** Erweiterung: Die Gleichung in (d)(i) soll per Definition auch für unbeschränktes $f$ gelten, was durch die Tatsache motiviert ist, daß in 4.4.4 bei Integration über eine ($E$-)Nullmenge die rechte Seite der Gleichung auch für unbeschränktes $f$ existiert und gleich null ist.

*Beweis.* (a) haben wir schon im Abschnitt vor diesem Satz erhalten. Für $f \geq 0$ ist

$$((\int f\,dE)x \mid x) = ((\int f^{\frac{1}{2}}\,dE)x \mid (\int f^{\frac{1}{2}}\,dE)x) \geq 0 \quad \forall x \in H,$$

d.h. $\int f\,dE \geq 0$.

(b) Für $\mathfrak{A}$-Treppenfunktionen $f = \sum_1^n \alpha_i \chi_{A_i}$ gilt

$$\begin{aligned} ((\int f\,dE)x \mid y) &= (\sum_1^n \alpha_i E(A_i)\,x \mid y) = \sum_1^n \alpha_i (\,E(A_i)\,x \mid y) \\ &= \sum_1^n \alpha_i \mu_{x,y}(A_i) = \int \sum_1^n \alpha_i \chi_{A_i}\,d\mu_{x,y} = \int f d\mu_{x,y}. \end{aligned}$$

Da jedes $f \in \mathcal{A}_b$ gleichmäßig durch Treppenfunktionen approximiert werden kann, folgt

$$((\int f\,dE)x \mid y) = \int f d\mu_{x,y} \quad \forall f \in \mathcal{A}_b,$$

denn komplexe Maße sind Linearkombinationen von positiven endlichen Maßen.

(c) Sind $f_n \in \mathcal{A}_b$ mit $\sup_n \|f_n\|_\infty < \infty$ und $f_n \to f$ punktweise so folgt wegen (b) und Lebegues Satz von der dominierten Konvergenz [5, (2.30)]

$$((\int f_n\,dE)x \mid y) \to ((\int f\,dE)x \mid y)$$

wie behauptet. Um die stärkere Aussage $(\int f_n\,dE)x \to (\int f\,dE)x, \quad \forall x \in H$ zu zeigen benutzt man

$$\begin{aligned} \|\int (f_n - f)\,dE)x\|^2 &= (\int (f_n - f)\,dE)x \mid \int (f_n - f)\,dE)x) \\ &= (\int |f_n - f|^2\,dE)x \mid x), \end{aligned}$$

was nach dem soeben gezeigten (mit $|f_n - f|^2$ anstelle von $f_n$) gegen Null konvergiert.

(d) (i) Ist $E(B) = 0$, so gilt für alle $f \in \mathcal{A}_b$

$$\int_B f\,dE = \int \chi_B f\,dE = \int \chi_B\,dE \int f\,dE = E(B)(\int f\,dE) = 0 \quad .$$

(ii) ist $E(B) = \mathrm{Id}_H$, also $E(\Delta \setminus B) = 0$, so folgt wegen (i):

$$\int f\,dE = \int \chi_B f\,dE + \int \chi_{\Delta\setminus B} f\,dE = \int_B f\,dE + \int_{\Delta\setminus B} f\,dE = \int_B f\,dE.$$

□

## 4.5 Weitere Spektralsätze für Operatoren auf $H$

**Satz 4.5.1** ((Spektralsatz II, für normale Operatoren)). *Sei $T \in B(H)$ normal, so gibt es genau ein Borelsches Spektralmaß $E$ auf $(\sigma(T), \mathfrak{B})$ mit*

$$T = \int_{\sigma(T)} \lambda\,dE(\lambda) \quad (= \int_{\sigma(T)} \mathbf{t}\,dE, \text{ wo } \mathbf{t}(\lambda) = \lambda \quad \forall(\lambda) \in \sigma(T)),$$

*nämlich das in 4.4.2 definierte Spektralmaß von $T$: $E(A) = \chi_A(T) = \tilde{\Phi}_T(\chi_a)$ für Borelsches $A \subset \sigma(T)$. Für dieses Spektralmaß gilt*

*(a)*

$$\int_{\sigma(T)} f\,dE = f(T) \quad \forall f \in \mathcal{B}_b.$$

*(b) Ein Operator $S \in B(H)$ kommutiert mit $T$ genau dann, wenn er mit allen $E(A)$, $A \in \mathcal{B}_b$ kommutiert.*

*Beweis.* (i) Existenz: Zu $T$ wurde in Satz 4.3.27 der Funktionalkalkül $\tilde{\Phi}_T : \mathcal{B}_b(\sigma(T)) \to B(H)$ konstruiert und dann dazu das Spektralmaß von $T$ $E^T : \mathfrak{B} \to B(H)$. Wir zeigen $T = \int \mathbf{t}\,dE^T$. Ist $f = \sum_1^n \alpha_i \chi_{A_i}$ eine Borelsche Treppenfunktion, so gilt

$$\int f\ dE^T = \sum_1^n \alpha_i \chi_{A_i}(T) = f(T),$$

da der Borelsche Funktionalkalkül von $T$ linear ist. Sind $f_n, n \in \mathbb{N}$, Treppenfunktionen mit $\|f_n - \mathbf{t}\|_\infty \to 0$ so folgt, wegen der $\|.\|_\infty$-Stetigkeit des Integrals und der des Borelschen Funktionalkalküls

$$\int \mathbf{t}\ dE^T = \lim_n \int f_n\ dE^T = \lim_n f_n(T) = \mathbf{t}(T) = T,$$

wobei die letzte Gleichheit Satz 4.3.27 (1) benutzt.

(ii) Eindeutigkeit: Spezialisiert man im Satz 4.4.3 $\Delta = \sigma(T), \mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ und ist $E : \mathfrak{B} \to B(H)$ ein Spektralmaß wie im Satz:

$$T = \int \mathbf{t}\,dE,$$

so erfüllt das Integral $f \mapsto \int f\, dE$ die Voraussetzungen von Satz 4.3.27, stimmt also mit dem Borelschen Funktionalkalkül $\tilde{\Phi}_T$ überein. Insbesondere gilt

$$E(A) = \int \chi_A\, dE = \chi_A(T) = E^T(A), \quad \forall A \in \mathfrak{B}.$$

d.h. $E$ ist das zu $T$ gehörige Spektralmaß. Im weiteren schreiben wir wieder einfach $E$ für das zu $T$ gehörige Spektralmaß.

(iii) Eigenschaft (a): Wie gerade in (ii) gezeigt, impliziert $\int \mathbf{t}\, dE = T$, daß das Integral bezüglich $E$ mit dem Borelschen Funktionalkalkül von $T$ übereinstimmt, also gilt (a).

(iv) Eigenschaft (b): Zunächst überzeugt man sich leicht, daß die Menge $\mathrm{Kom}(S) := \{R \in B(H) \,|\, RS = SR\}$ (genannt die **Kommutante** von $S$) eine Unteralgebra von $B(H)$ ist, die in der schwachen Operatortopologie (also auch in der Normtopologie) abgeschlossen ist. Behauptung (b) lautet

$$T, T^* \in \mathrm{Kom}(S) \Longleftrightarrow E(A) \in \mathrm{Kom}(S)\ \forall A \in \mathfrak{B}.$$

"$\Longleftarrow$": Mit den $E(A)$ liegen auch alle Linearkombinationen $\sum_1^k \alpha_i E(A_i)$, d.h. die Integrale $\int f\, dE$ aller Treppenfunktionen, in $\mathrm{Kom}(S)$. Wie schon in (a) gezeigt ist $T$ der Limes von solchen Integralen $\int f_n\, dE$ und folglich auch $\lim \int \overline{f_n}\, dE = \lim(\int f_n\, dE)^* = T^*$, woraus $T, T^* \in \mathrm{Kom}(S)$ folgt.
"$\Longrightarrow$": Mit $T$ und $T^*$ liegt auch die davon erzeugte Unteralgebra von $B(H)$, also alle $f(T)$, $f \in \mathcal{C}(\sigma(T))$, in $\mathrm{Kom}(S)$. Ist $A \subset \sigma(T)$ (relativ) offen, so gibt es $f_n \in \mathcal{C}(\sigma(T))$ mit $0 \leq f_n \leq 1$ und $f_n \to \chi_A$ punktweise, also nach Satz 4.4.3

$$(\int f_n\, dE)x \to (\int \chi_A\, dE)x = E(A)x\ \forall x \in H.$$

Somit gilt $E(A) \in \mathrm{Kom}(S)$ für offenes $A \subset \sigma(T)$. Sind $E(A)$, $E(B) \in \mathrm{Kom}(S)$ so auch

$$\begin{aligned} E(A \cap B) &= E(A)E_B, \text{ ebenso} \\ E(A \setminus B) &= E(A) - E_B \text{ sowie} \\ E(A \cup B) &= E(A \setminus B) + E(B). \end{aligned}$$

Sind $A_n$, $n \in \mathbb{N}$ paarwise disjunkt mit $E(A_n) \in \mathrm{Kom}(S)\, \forall n \in \mathbb{N}$, so gilt

$$\begin{aligned} E(\cup_n A_n) &= \sum_n E(A_n) \text{ also} \\ E(\cup_n A_n) &\in \mathrm{Kom}(S). \end{aligned}$$

Die Menge der $A \in \mathcal{B}$ mit $E(A) \in \mathrm{Kom}(S)$ ist somit eine $\sigma$-Algebra Borelscher Mengen, welche die offenen Mengen enthält, also gleich $\mathcal{B}$ sein muß.

□

**Bemerkung.** Ein Borelsches Spektralmaß $E$ auf $\sigma(T)$ lässt sich auf genau eine Weise zu einem Borelschen Spektralmaß $\tilde{E}$ auf $\mathbb{C}$ fortsetzen, denn wegen $\tilde{E}(\mathbb{C}) = \mathrm{Id}_H = E(\sigma(T))$ muss $\tilde{E}(\mathbb{C} \setminus \sigma(T)) = 0$ gelten, also auch $\tilde{E}(B) = 0$ für Borelsches $B \subset \mathbb{C} \setminus \sigma(T)$. Man kann nun in Satz 4.5.1 $\sigma(T)$ durch $\mathbb{C}$ und das Spektralmaß auf $\sigma(T)$ durch seine Fortsetzung auf $\mathbb{C}$ ersetzen

$$\tilde{E}(B) = \tilde{\Phi}(\chi_{B\cap\sigma(T)}) = \chi_{B\cap\sigma(T)}(T)\, \forall B \in \mathfrak{B},$$

aber bleibt die Eindeutigkeit erhalten?

**Lemma 4.5.2.** *Sei $T \in B(H)$ normal und $E$ ein Borelsches Spektralmaß auf $\mathbb{C}$ mit $\int_{\sigma(T)} \mathbf{t}\, dE = T$, wo $\mathbf{t}(z) = z$, $\forall z \in \mathbb{C}$. Dann wird $E$ von einer beschränkten Menge getragen.*

*Beweis.* Sei $T \in B(H)$ normal und $E$ ein Borelsches Spektralmaßauf $\mathbb{C}$ mit $T = \int_{\mathbb{C}} \mathbf{t}\, dE$, wo $\mathbf{t}(z) = z$. Sei $Q$ die Menge der halboffenen Quadrate $I_{m,n} = [m, m+1) \times [n, n+1),\ n, m \in \mathbb{Z}$, die $K_{\|T\|+1}(0)$ nicht treffen. Sei $z_{m,n} = (m + \frac{1}{m}, n + \frac{1}{n})$ der Mittelpunkt von $I_{m,n}$. Es gilt $|\mathbf{t} - z_{m,n}\chi_{I_{m,n}}| < \frac{1}{\sqrt{2}}$ auf $I_{m,n}$, also nach Satz 4.4.3

$$\|z_{m,n}E(I_{m,n}) - \int_{I_{m,n}} \mathbf{t}\, dE\| = \|\int_{I_{m,n}} (z_{m,n}\chi_{I_{m,n}} - \mathbf{t})\, dE\| \le \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Da

$$int_{I_{m,n}} \mathbf{t}\, dE = \int_{\mathbb{C}} \chi_{I_{m,n}} \mathbf{t}\, dE = E(I_{m,n})T,$$

erhalten wir

$$\|z_{m,n}E(I_{m,n})\| \le \frac{1}{\sqrt{2}} + \|T\|.$$

Andereseits gilt

$$\|z_{m,n}E(I_{m,n})\| = z_{m,n}\|E(I_{m,n})\| \ge (\|T\| + 1)\|E(I_{m,n})\|.$$

Es folgt $\|E(I_{m,n})\| = 0$. Als abzählbare Vereinigung von $E$-Nullmengen ist $J := \cup_{m,n} I_{m,n}$ eine $E$-Nullmenge. Somit wird $E$ von $\mathbb{C} \setminus J$ getragen, und $\mathbb{C} \setminus J$ ist als Vereinigung endlich vieler Quadrate beschränkt. □

**Satz 4.5.3** (Spektralsatz II´, für normale Operatoren). *Ist $T \in B(H)$ normal, so gibt es genau ein Borelsches Spektralmaß $E$ auf $\mathbb{C}$ mit*

$$T = \int_{\mathbb{C}} \lambda\, dE_\lambda$$

*($= \int_{\mathbb{C}} \mathbf{t}\, dE$, wo $\mathbf{t}(\lambda) = \lambda$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$), nämlich das auf $\mathbb{C}$ fortgesetzte Spektralmaß von $T$ ($E(B) = \chi_{B\cap\sigma(T)}(T)\, \forall B \in \mathfrak{B}$). Für dieses Spektralmaß gilt*

*(a)*

$$\int_{\mathbb{C}} f\, dE = \int_{\sigma(T)} f\, dE = f(T),\ \forall f \in \mathcal{B}_b$$

*(b) Ein Operator $S \in B(H)$ kommutiert mit $T$ genau dann, wenn er mit allen $E(A)$, $A \in \mathfrak{B}$, kommutiert.*

*Im Fall von selbstadjungiertem $T$ ($T = T^*$) gilt der Satz auch mit $\mathbb{R}$ anstelle von $\mathbb{C}$.*

*Beweis.* Daß das fortgesetzte Spektralmaß von $T$ alles erfüllt ist wegen Spektralsatz II klar. Eindeutigkeit: Sei $E$ ein Borelsches Spektralmaß auf $\mathbb{C}$ mit $T = \int_{\mathbb{C}} \mathbf{t}\, dE$. Nach dem Lemma 4.5.2 wird $E$ von einer beschränkten Menge $K \subset \mathbb{C}$ getragen. Wir können $K$ kompakt mit $K \supset \sigma(T)$ wählen. Wegen $T = \int \mathbf{t}\, dE = \int_K \mathbf{t}\, dE$ gilt nach Satz 4.4.3 (a)(d) $\int \overline{\mathbf{t}}\, dE = T^*$, folglich $\int p(\mathbf{t}, \overline{\mathbf{t}})\, dE = p(T, T^*)$ für alle Polynome $p(t, \overline{t})$, also ist wegen Stone-Weierstraß auch $\int f\, dE$ für alle $f \in \mathcal{C}(K)$ eindeutig bestimmt. Hieraus folgt wegen Satz 4.4.3 (c), daß $\int \chi_A\, dE = E(A)$ für (relativ) offene $A$ in $K$ festgelegt ist, denn für jedes solche $A$ gibt es eine beschränkte Folge in $\mathcal{C}(K)$, die punktweise gegen $\chi_A$konvergiert. Sind $E(B)$ und $E(C)$ bestimmt, so auch $E(B \cap C) = E_B \cap E(C)$ und $E(K \setminus B) = \mathrm{Id}_H - E(B)$, und sind $E(A_k)$, $k \in \mathbb{N}$, für paarweise disjunkte Borelsche Teilmengen $A_k$ von $K$ bestimmt, so auch $E(\cup_k A_k) = \sum_1^\infty E(A_k)$. Somit bildet die Menge der Borelschen $A \subset K$ mit eindeutig bestimmtem $E(A)$ eine $\sigma$-Algebra, welche die (relativ) offenen Teilmengen von $K$ enthält, mithin gleich $\mathfrak{B}(K)$ ist. Also stimmt $E$ auf $K$ mit dem (fortgesetzten) Spektralmaß von $T$ überein. Auf $\mathbb{C} \setminus K$ verschwinden beide, folglich sind die Spektralmaße insgesamt gleich: für $B \in \mathfrak{B}$ gilt $E(B) = E(B \cap \sigma(T)) + E(B \cap (\mathbb{C} \setminus \sigma(T))) = E(B \cap \sigma(T)) = \chi_{B \cap \sigma(T)}(T)$. □

**Definition 4.5.4.** *Die Fortsetzung des Spektralmaßes von $T$ auf $\mathbb{C}$ (bzw. im Fall von $T = T^*$ auf $\mathbb{R}$) nennen wir das Spektralmaß von $T$ auf $\mathbb{C}$ (bzw. auf $\mathbb{R}$).*

Eine andere *klassische* Form des Spektralsatzes:

**Satz 4.5.5** (Spektralsatz III, für selbstadjungierte Operatoren)**.** *Sei $T = T^* \in B(H)$ selbstadjungiert, also $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$. Sei $m = \min \sigma(T)$, $M = \max \sigma(T)$. Dann gibt es eindeutig bestimmte orthogonale Projektionen $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ (Spektralschar genannt) mit:*

*(i)* $E_\lambda \leq E_\mu$ ( *also* $E_\lambda H \subset E_\mu H$) $\forall \lambda < \mu$.

*(ii)* $E_\lambda = 0$ *für* $\lambda \leq m$, *sowie* $E_\lambda = \mathrm{Id}_H$ *für* $\lambda > M$

*(iii)* $\lim_{\lambda \uparrow \mu} E_\lambda x = E_\mu x \ \forall x \in H$

*(iv)* $T = \int_m^{M+\varepsilon} \lambda\, dE_\lambda$ *(normkonvergentes Riemann-Stieltjes Integral), wobei* $\varepsilon > 0$ *beliebig ist.*

*Außerdem gilt*

*(v) für* $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ $f_{|\sigma(T)}(T) = \int_m^{M+\varepsilon} f(\lambda)\, dE_\lambda$,

*(vi) für* $S \in B(H)$ *gilt* $ST = TS \Leftrightarrow (SE_\lambda = E_\lambda S \ \forall \lambda \in \mathbb{R})$

*Beweis.* Existenz: Ist $E$ das (fortgesetzte) Spektralmaß von $T$ auf $\mathbb{R}$, so nimmt man $E_\lambda := E((-\infty, \lambda))$ und stellt fest, daß (i)-(iii) erfüllt ist. Für $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}} f\, dE = \int_{[m,M+\varepsilon)} f\, dE = \int_{\sigma(T)} f\, dE = f_{|\sigma(T)}(T),$$

da $E$ von $\sigma(T)$ getragen wird. Das zweite Integral kann durch gleichmäßige Approximation von $f$ auf $[m, M+\varepsilon)$ mit Treppenfunktionen der Form

$$\sum_1^n \alpha_i \chi_{[\alpha_{i-1},\alpha_i)}, \text{ wo } m = \alpha_0 < \ldots, \alpha : n = M + \varepsilon,$$

gewonnen werden. Da $E([a,b)) = E_b - E_a$ gilt und man $\alpha_i = f(x_i)$ mit $x_i \in [\alpha_{i-1}, \alpha_i)$wählen kann, lässt sich

$$\int_{[m,M+\varepsilon)} f\, dE$$

auch als Riemann-Stieltjes-Integral interpretieren,was zusammen mit Satz 4.5.3 (iv) und (v) zeigt. Zu (vi): $\Rightarrow$ folgt aus 4.5.3, $\Leftarrow$ aus der Tatsache, daß $T$ Limes von Operatoren der Form

$$\sum_1^n \alpha_i E([a_{i-1}, a_i)) = \sum_1^n \alpha_i (E_{a_i} - E_{a_{i-1}})$$

ist.

Eindeutigkeit: Sei $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}\}$ eine Schar von orthogonalen Projektionen in $B(H)$, die (i)–(iv) erfüllen, sei $J := [m, M+\varepsilon)$ und $\mathfrak{H}$ die Menge der halboffenen Intervalle $[a, b) \subset J$. Sei $\mathcal{T}$ der Raum der $\mathfrak{H}$-Treppenfunktionen (d.h. von der Form $\sum_1^n \alpha_i \chi_{A_i}$ mit $A_i \in \mathfrak{H}$, und sei

$$L = \{f : J \to \mathbb{C} \mid \exists f_n \in \mathcal{T} \text{ mit } \|f - f_n\|_\infty \to 0\}.$$

Setzt man $F([a, b)) = E_b - E_a$, so ist $F$ ein projektorwertiger Inhalt auf $\mathfrak{H}$, d.h. für paarweise disjunkte $A_i \in \mathfrak{H}$ mit $\cup_1^n A_i \in \mathfrak{H}$ gilt $F(\cup_1^n A_i) = \sum_1^n F(A_i)$.

Analog wie in Abschnitt 4.4 lässt sich auf $\mathcal{T}$ durch

$$I(\sum_1^n \alpha_i \chi_{A_i}) = \sum_1^n \alpha_i F(A_i)$$

ein elementares Integral definieren und per Stetigkeit auf $L$ fortsetzen;

$$\int_J f\, dF = \lim I(f_n), \text{ wo } f_n \in \mathcal{T} \text{ mit } \|f - f_n\|_\infty \to 0.$$

Das Integral $f \mapsto \int f\, dF$ ist dann ein unitaler $*$-Homomorphismus von $L$ nach $B(H)$, positiv (d.h. $f \geq 0 \Rightarrow \int f\, dF \geq 0$, für die Ordnung auf $B(H)$ siehe Übung 4.6.2) und mit $\| \int f\, dF\| \leq \|f\|_\infty$.

Für $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ ist $f_{|J}$ gleichmässig stetig (sogar auf $\overline{J}$), also existiert das Riemann-Stieltjes-Integral

$$\int_J f(\lambda)\, dE_\lambda.$$

Die approximierenden Summen

$$\sum f(x_i)(E_{a_i} - E_{a_{i-1}}) \text{ lassen sich als } I(\sum f(x_i)\chi_{[a_{i-1},a_i)})$$

lesen und da mit fortschreitender Approximation die Längen der Intervalle $[a_{i-1}, a_i)$ gegen null gehen, wird $f$ gleichmäßig approximiert, es gilt also

$$\int_J f(\lambda)\, dE_\lambda = \int_J f\, dF.$$

Für $f(\lambda) = \lambda$ ist $\int f\, dF$ durch (iv) eindeutig festgelegt.

Das legt auch $\int_J p\, dF$ für jedes Polynom $p$ fest, und da die Polynome in $\mathcal{C}(\overline{J})$ und somit auch in $\mathcal{C}_{|J}$dicht liegen, ist $\int_J f\, dF$ für jedes $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ eindeutig bestimmt.

Sei nun $m < \lambda < M + \varepsilon$ und sei $n \in \mathbb{N}$ mit $m < \lambda - \frac{1}{n} < \lambda$. Sei $f_n \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ stückweise linear, $f_n = 1$ auf $(-\infty, \lambda - \frac{1}{n}]$, $f_n = 0$ auf $[\lambda, \infty)$ linear auf $[\lambda - \frac{1}{n}, \lambda)$. Es gilt

$$\chi_{(-\infty,\lambda-\frac{1}{n}]} \leq f_n \leq \chi_{(-\infty,\lambda)}, \text{ also auf } J: \chi_{([m,\lambda-\frac{1}{n}]} \leq f_{n|J} \leq \chi_{(m,\lambda)},$$

und somit

$$E_{\lambda-\frac{1}{n}} - 0 = \int_m^{\lambda-\frac{1}{n}} dF \leq \int_J f_n\, dF \leq \int_m^\lambda dF = E_\lambda - 0.$$

Wegen

$$(E_{\lambda-\frac{1}{n}} x|x) \to (E_\lambda x|x)\ \forall x \in H \text{ gilt } (\int_J f_n\, dF\, x|x) \to (E_\lambda x|x)\ \forall x \in H,$$

d.h. die orthogonale Projektion $E_\lambda$ ist eindeutig bestimmt. □

Der Satz 4.5.5 entsprechende Spektralsatz III für normale Operatoren ist etwas umständlicher zu formulieren, da $\sigma(T)$ nun komplex ist. Die Spektralschar hat nun einen komplexen Parameter. Auf $\mathbb{C}$ benutzen wir die Ordnung $\preceq$, wobei für $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 i$, $\mu = \mu_1 + \mu_2 i$ $\lambda \preceq \mu$ gleichbedeutend mit $\lambda_1 \leq \mu_1$ und $\lambda_2 \leq \mu_2$ ist, $m$ und $M$ sind nun inf und sup von $\sigma(T)$ im Sinne dieser Ordnung. Bei (vi) steht dann rechts $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, bei (iv) steht ein zweidimensionales Riemann-Stieltjes-Integral. Der Beweis ergibt sich analog mit $E_\lambda = E_{(-\infty,a)\times(-\infty,b)}$ für $\lambda = (a, b) \in \mathbb{C}$. Um die Projektorwerte der für das Sieltjes-Integral benötigten halboffenen Rechtecke darzustellen braucht man nun vier Terme: $E([a, b) \times [c, d)) = E((b, d)) - E((a, d)) - E((b, a)) + E((a, c))$.

## 4.6 Übungen, Beispiele, Ergänzungen

**Übung 4.6.1.** *Sei $a \in A$ ein normales Element einer $C^*$-Algebra $A$. Man zeige*

$$\lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} = \|a\|.$$

**Übung 4.6.2.** *Sei $H$ ein komplexer Hilbertraum.*
*$B(H)_+ = \{A \in B(H) \mid \ < Ax \mid x > \geq 0 \ \forall x \in H\}$ die Menge der positiven Operatoren auf $H$. Man zeige:*

*(i) $B(H)_+$ ist ein konvexer Kegel.*

*(ii) Die Relation $A \leq B \ :\Leftrightarrow B - A \in B(H)_+$ definiert eine Ordnung auf $B(H)$.*

**Übung 4.6.3.** *Sei $\mathfrak{A}$ eine $\sigma$-Algebra von Teilmengen von $\Delta$. Eine (komplexwertige) Funktion heißt Treppenfunktion, falls sie nur endlich viele Werte annimmt. Man zeige, daß sie eine Darstellung*

$$\sum_1^n \alpha_i \chi_{A_i}, \quad \alpha_i \in \mathbb{C},\ A_i \in \mathfrak{A}$$

*mit paarweise disjunkten Mengen $\{A_1, \ldots, A_n\}$ besitzt.*

**Übung 4.6.4.** *Zu jedem (komplexwertigem) beschränkten $\mathfrak{A}$-meßbaren $f \in \mathcal{A}_b$ gibt es eine Folge von Treppenfunktionen, die gleichmäßig gegen $f$ konvergiert. Hinweis: Man zerlege den Wertebereich der zu approximierenden Funktion jeweils fein genug.*

**Übung 4.6.5.** *Sei $\mathfrak{A}$ eine $\sigma$-Algebra von Teilmengen von $\Delta$. Man zeige, daß die beschränkten $\mathfrak{A}$-meßbaren komplexwertigen Funktionen $\mathcal{A}_b$ mit punktweisen Operationen und der Norm, $\|f\|_\infty = \sup_{y\in\Delta} |f(y)|$ eine Banachalgebra bilden. Durch komplexe Kongugation ist eine isometrische Involution gegeben.*

**Übung 4.6.6.** *Sei $\mathfrak{A}$ eine $\sigma$-Algebra von Teilmengen von $\Delta$ Man zeige, daß für eine meßbare komplexwertige Funktion ihr Spektrum in der Banachalgebra $\mathcal{A}_b$ der beschränkten $\mathfrak{A}$-meßbaren Funktionen der topologische Abschluß ihres Bildes ist. D.h.*

$$\sigma_{\mathcal{A}}(f) = \overline{f(\Delta)}$$

**Übung 4.6.7.** *Man zeige die Behauptung nach 4.4.1, nämlich, daß in der Definition (b) ein Folge von (a) und (c) ist.*

# Kapitel 5

# Kompakte Operatoren

## 5.1 Grundbegriffe

### Gleichgradige Stetigkeit und der Satz von Arzela-Ascoli

**Definition 5.1.1.** *Sei $X$ ein topologischer Raum, $Y$ ein halbmetreischer Raum und $F$ eine Menge stetiger Abbildungen von $X$ nach $Y$ . Dann heißt $F$ gleichgradig stetig(odergleichstetig), wenn es zu jedem $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ eine Umgebung $U_x$ von $x$ gibt mit $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$, für alle $f \in F$ und $y \in U_x$.*

**Satz 5.1.2** (Arzela-Ascoli). *Sei $X$ ein kompakter metrischer Raum und $\mathcal{C}(X)$ der Raum der stetigen $\mathbb{K}$-wertigen Funktionen auf $X$ mit der Metrik*

$$d(f,g) := \max_{x \in X} |f(x) - f(y)|.$$

*Dann gilt: Eine Menge $N \subset \mathcal{C}(X)$ ist genau dann relativ kompakt in $\mathcal{C}(X)$, wenn $N$ beschränkt und gleichgradig stetig ist.*

*Beweis.* "$\Rightarrow$" Sei $N$ relativ kompakt. Als Teilmenge der kompakten Menge $\overline{N}$ ist $N$ beschränkt, sogar total beschränkt. Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt $f_1, \dots, f_n \in N$ mit $N \subset \cup_{i=1}^{n} K_{\frac{\varepsilon}{3}}(f_i)$. Zu $x \in X$ gibt es eine Umgebung $U_x$ ¿ 0 mit $|f_i(y) - f_i(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ für alle $y \in U_x, \ i = 1, \dots, n$. Also gilt für $y \in U_x$ und $f \in N$ mit passend gewähltem $i$:

$$|f(y) - f(x)| \leq |f(y) - f_i(y)| + |f_i(y) - f_i(x)| + |f_i(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

d.h. $N$ ist gleichgradig stetig.
"$\Leftarrow$" Sei $N$ beschränkt und gleichgradig stetig, und sei $\varepsilon > 0$. Zu $x \in X$ existiert $r > 0$ mit $|f(y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$, für alle $y \in U_x, \ f \in N$. Da $X$ kompakt ist, gibt es $x_1, \dots,_x m \in X$ mit $X \subset \cup_{i=1}^{m} U_{x_i}$. Betrachte $\phi = \{(f(x_1), \dots, f(x_m)) \mid f \in N\}$. Da $\phi$ eine beschränkte Teilmenge von $\mathbb{K}^m$ ist, ist es relativ kompakt. Es gibt also $f_1, \dots, f_n \in N$ mit

$$|f(x_i) - f_k(x_i)| < \frac{\varepsilon}{3},$$

für alle $f$ und $i$ und geeignetes (von $f$ abhängiges) $k \in \{1, \ldots, n\}$. Wir erhalten somit für passendes $i$ und $k$

$$|f(x) - f_k(x)| \leq |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - f_k(x_i)| + |f_k(x_i) - f_k(x)| \leq 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

d.h. $N \subset \cup_{k=1}^{n} K_\varepsilon(f_k)$. Also ist $N$ nach 1.4.6 (b) relativ kompakt. □

### Definition kompakter Operatoren und Beispiele

**Definition 5.1.3.** *Seien $E, F$ normierte Räume und $T : E \to F$ linear. Der Operator $T$ heißt* **kompakt***, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:*

*(i)*

1. *Das Bild der Einheitskugel $\{x \in E \mid \|x\| \leq 1\}$ ist relativ kompakt.*
2. *Das Bild jeder beschränkten Menge ist relativ kompakt.*
3. *Ist $\{x_n\}$ eine beschränkte Folge, so hat $\{Tx_n\}$ eine konvergente Teilfolge.*

*(Die Implikation (iii)⇒(ii) folgt aus Übung1.6.23)*

**Bemerkung.** Ist die lineare Abbildung $T : E \to F$ kompakt, so ist das Bild der Einheitskugel beschränkt, d.h. $T$ ist stetig.

**Beispiele 5.1.4.** *(a) Jeder stetige Operator mit endlich-dimensionalem Bild ist kompakt.*

*(b) Der Eins-Operator eines unendlich-dimensionalen normierten Raumes ist nicht kompakt (Übung3.5.17).*

*(c) Sei $\{t_n\} \in l^\infty$ . Definiert man den Operator $T$ auf $l^2$ durch $T(\{x_n\}) := \{t_n x_n\}$ , so ist $T$ genau dann kompakt, wenn $\{t_n\}$ eine Nullfolge ist (vgl. Übung 3.5.9).*

*(d) Sei $t$ eine stetige komplexwertige Funktion auf dem Quadrat $[0,1] \times [0,1]$ . Definiert man auf $\mathcal{C}([0,1] \times [0,1])$ den Operator $T$ durch*

*$Tf(x) := \int_0^1 t(x,y) f(y) dy$ , so ist $T$ kompakt (verwende für den Beweis den Satz von Arzela-Ascoli).*

## 5.2 Eigenschaften kompakter Operatoren

Die Menge der kompakten linearen Operatoren von $E$ nach $F$ bezeichnen wir mit $K(E,F)$ . Für $K(E,E)$ schreiben wir auch $K(E)$ .

**Satz 5.2.1.** *(a) Sind $E$ und $F$ normiert, so ist $K(E,F)$ ein linearer Teilraum von $B(E,F)$.*

(b) *Ist $F$ vollständig, also ein Banachraum, so ist $K(E,F)$ abgeschlossen in $B(E,F)$.*

(c) *Sind $E,F,G,H$ normierte Räume und $T \in K(E,F), R \in B(G,E), S \in B(F,H)$, so gilt $S \circ T \circ R \in K(G,H)$. Insbesondere ist $K(E)$ ein Ideal in $B(E)$.*

*Beweis.* (a) Folgt aus der Stetigkeit der Skalarmultiplikation und der Addition in $F$ und der Tatsache, daß stetige Bilder kompakter Mengen kompakt sind..

(b) Sei $\varepsilon > 0$ und gelte $T_n \to T$ mit $T_n \in K(E,F), T \in B(E,F)$. Es gibt ein $n_0$ mit $\|T - T_{n_0}\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Da $T_{n_0}$ kompakt ist, gibt es endlich viele $x_1, \dots, x_k$ aus der Einheitskugel $E_1$ von $E$ mit $\cup_{i=1}^k K_{\frac{\varepsilon}{3}}(T_{n_0}x_i) \supset T_{n_0}E_1$ . Dann gilt $\cup_{i=1}^k K_\varepsilon(Tx_i) \supset TE_1$ , denn für $x \in E_1$ gilt mit passendem $i$

$$\begin{aligned}\|Tx - Tx_i\| &\leq \|Tx - T_{n_0}x\| + \|T_{n_0}x - T_{n_0}x_i\| + \|T_{n_0}x_i - Tx_i\| \\ &\leq \|T - T_{n_0}\|\|x\| + \frac{\varepsilon}{3} + \|T - T_{n_0}\|\|x_i\| \\ &< \frac{\varepsilon}{3}\|x\| + \frac{\varepsilon}{3} + + \frac{\varepsilon}{3}\|x_i\| \leq \varepsilon\end{aligned}$$

Somit ist $TE_1$ präkompakt, also, da $F$ vollständig ist, relativ kompakt, d.h. $T$ ist kompakt.

(c) ist klar, da stetig lineare Abbildungen beschränkte (bzw. kompakte) Mengen in beschränkte (bzw. kompakte) Mengen abbilden.

□

**Satz 5.2.2.** *Seien $E,F$ normiert und $T \in K(E,F)$. Dann ist $T' \in K(F',E')$ kompakt. Wenn $F$ vollständig ist gilt auch die Umkehrung.*

*Beweis.* "⇒"Sei $T \in K(E,F)$ und $E_1$ bzw. $F_1'$ die Einheitskugel von $E$ bzw. $F'$. Die Menge $\overline{TE_1}$ ist kompakt. Ist $\varphi \in F'$ so ist $\varphi \circ T : E \to \mathbb{C}$ im Bild von $F'$ unter $T'$. Die Abbildung $\varphi \circ T \mapsto \varphi_{|\overline{TE_1}}$ von $T'F'$ nach $\mathcal{C}(\overline{TE_1})$ ist wohldefiniert (denn $\varphi \circ T = \psi \circ T$ impliziert $\varphi = \psi$ auf $TE$) und isometrisch, denn

$$\|\varphi \circ T\| = \sup_{y \in E_1} |\varphi \circ T(y)| = \sup_{z \in TE_1} |\varphi(z)| = \sup_{z \in \overline{TE_1}} |\varphi(z)|.$$

Die Menge der $\varphi_{|\overline{TE_1}}$, wo $\varphi \in F_1'$, ist wegen $\|\varphi\| \leq 1$ gleichgradig stetig und wegen $\|\varphi_{|\overline{TE_1}}\| \leq \|T\|$ beschränkt, also nach dem Satz von Arzela-Ascoli relativ kompakt. Somit ist auch $T'(F_1'$ relativ kompakt, d.h. $T'$ ist kompakt. "⇐" Sei $T' \in K(F',E')$. Dann ist nach (i) $T'' \in K(E'',F'')$. Sind $J_E$ und $J_F$ die kanonischen Injektionen von $E$ in $E''$ bzw. $F$ in $F''$, so gilt

$$[T''(J_E(x)](\varphi) = [J_E x](T'\varphi) =< x, T'\varphi >=< Tx, \varphi >= J_F(Tx)(\varphi)$$

d.h. $J_F^{-1}T''J_E = T$ oder $T''$ ist eine Fortsetzung von $T$, wenn wir $E$ mit $J_E E$ und $F$ mit $J_F F$ identifizieren. Wegen $TE_1 \subset T''(E_1'')$ ist $TE_1$ relativ kompakt in $F''$, also da $F$ vollständig ist auch in $F$. □

## 5.3 Spektraltheorie kompakter Operatoren

### Riesz-Schauder-Theorie

**Lemma 5.3.1.** *Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, $E$ ein normierter Raum (über $\mathbb{K}$), $T \in K(E)$, $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$, und sei $T_\lambda := \lambda - T$. Dann gilt: Das Bild $R(T_\lambda) = T_\lambda E$ ist abgeschlossen in $E$.*

*Beweis.* Seien $x_n \in E$ mit $T_\lambda x_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} y \in E$. Wir können, indem wir zu den $x_n$ geeignete Elemente des Kerns $N(T_\lambda)$ addieren, ohne Einschränkung voraussetzen, dass $\|\dot{x}_n\| \leq \|x_n\| \leq 2\|\dot{x}_n\|$ gilt, wobei $\|\dot{x}_n\|$ die zum Faktorraum $\dot{E} = E/N(T_\lambda)$ gehörige Quotientennorm ist.

(a) Ist $\{x_n\}$ beschränkt, so gibt es eine Teilfolge $\{x_{n_k}\}$ mit $Tx_{n_k} \to z \in E$. Also ist $x_{n_k} = \frac{1}{\lambda}(T_\lambda x_{n_k} + Tx_{n_k})$ konvergent gegen $x = \frac{1}{\lambda}(y+z)$ und wegen der Stetigkeit von $T_\lambda$ folgt $T_\lambda x = y$, also $y \in R(T_\lambda)$.

(b) Ist $\{x_n\}$ unbeschränkt, so betrachten wir $x'_n = \frac{x_n}{\|x_n\|}$. Es gilt $T_\lambda x_n \to 0$ und (indem wir zu einer geeigneten Teilfolge übergehen, s.o.) $x_n \to s \in E$, also $T_\lambda s = \lim T_\lambda x'_n = 0$, d.h. $s \in N(T_\lambda)$. Es folgt $1 = \|x'_n\| \leq 2\|\dot{x}_n\| \to 2\|\dot{s}\| = 0$, ein Widerspruch. Also kann der Fall (b) nicht auftreten, und die Behauptung ist bewiesen.

□

**Lemma 5.3.2.** *Sei $E$ normiert, $T \in K(E), 0 \neq \lambda \in K$ und sei wieder $T_\lambda := \lambda - T$. Dann gilt: Die kanonische Abbildung $\dot{x} \mapsto T_\lambda x$ von $E/N(T_\lambda)$ auf $R(T_\lambda)$ ist ein bistetiger Isomorphismus.*

*Beweis.* Die Isomorphie und Stetigkeit der Abbildung ist klar. Es bleibt die Stetigkeit der Umkehrabbildung zu zeigen. Gilt $T_\lambda x_n \to T_\lambda z$ und wählen wir (durch Addition geeigneter Elemente aus $N(T_\lambda)$ die $x_n$ so, dass $\|\dot{x}_n\| \leq \|x_n\| \leq 2\|\dot{x}_n\|$ gilt, so zeigt der Beweis des letzten Lemmas, dass es eine konvergente Teilfolge $x_{n_k} \to x \in E$ gibt. Es folgt $\dot{x}_{n_k} \to \dot{x}$ sowie $T_\lambda x_{n_k} \to T_\lambda x = T_\lambda z$, also $\dot{x} = \dot{z}$. Somit ist die Abbildung $T_\lambda z \mapsto \dot{z}$ stetig. □

**Satz 5.3.3.** *Sei $E$ normiert, $T \in K(E)$ und sei $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$. Dann gilt: $\lambda$ ist Eigenwert oder liegt in der Resolventenmenge. Es gilt also:*

$$\sigma(T) \setminus \{0\} = \sigma_p(T) \setminus \{0\}.$$

*Beweis.* Sei $\lambda \notin \sigma_p(T)$, also $N(T_\lambda) = \{0\}$. Wegen Lemma 5.3.2 ist $T_\lambda$ ein bistetiger Isomorphismus von $E$ auf $R(T_\lambda)$. Wir zeigen $R(T_\lambda) = E$. Andernfalls wäre $E_1 := R(T_\lambda)$ ein abgeschlossener echter Teilraum von $E$. Da $T_\lambda$ injektiv ist, ist dann $E_2 = T_\lambda E_1$ ein echter (und abgeschlossener) Teilraum von $E_1$ u.s.w. mit $E_n = T_\lambda E_{n-1}$. Für jedes $n$ sei nun $y_n \in E_n$ mit $\|y_n\| = 1$ und $\operatorname{dist}(y_n, E_{n+1}) \geq \frac{1}{2}$. Für $n > m$ gilt

$$Ty_n - Ty_m = (T_\lambda - \lambda)(y_m - y_n) = -\lambda y_m + r, \text{ wobei } r \in E_{m+1}.$$

Also ist

$$\|Ty_n - Ty_m\| \geq \operatorname{dist}(\lambda y_m, E_{m+1}) \geq |\lambda|\frac{1}{2}.$$

Somit kann $\{Ty_n\}$ keine konvergente Teilfolge enthalten, also ist $T$ nicht kompakt, ein Widerspruch. Also gilt $R(T_\lambda) = E$ und $T_\lambda$ ist somit invertierbar. □

Zur Vorbereitung des nächsten Satzes halten wir für normales $T \in B(H)$ drei Eigenschaften fest.

(i) Wegen $T^*T = TT^*$ gilt $\|Tx\| = \|T^*x\|$, $\forall x \in H$, denn

$$\|Tx\|^2 = (\,Tx \mid Tx) = (\,T^*Tx \mid x) = (\,TT^*x \mid x) = \|T^*x\|^2.$$

(ii) Ist $\lambda$ ein Eigenwert von $T$ und $x$ der zugehörige Eigenvektor, so ist $x$ auch Eigenvektor von $T^*$ zum Eigenwert $\overline{\lambda}$. Denn $T - \lambda$ ist normal und $0 = \|Tx - \lambda x\| = \|(T^* - \overline{\lambda})x\|$, also $T^*x = \lambda x$.

(iii) Sind $\lambda \neq \mu$ Eigenwerte von $T$, so sind die zugehörigen Eigenräume $E_\mu,\ E_\lambda$ zueinander orthogonal. Denn ist $Tx = \lambda x,\ Ty = \mu y$, so gilt

$$\lambda(\,x \mid y) = (\,Tx \mid y) = (\,x \mid T^*y) = (\,x \mid \overline{\mu}y) = \mu(\,x \mid y),$$

also $(\,x \mid y) = 0$, da $\mu \neq \lambda$.

**Satz 5.3.4** (Spektralsatz für normale kompakte Operatoren)**.** *Sei $H$ ein Hilbertraum über $\mathbb{C}$ und $T \in B(H)$ normal . Dann gibt es eine* ONB *von $H$ aus Eigenvektoren von $T$.*
*Ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ so gilt dieser Satz für selbstadjungierte kompakte Operatoren.*

*Beweis.* Sei in jedem Eigeraum von $T$ eine ONB gewählt und $\mathcal{B}$ die Vereinigung dieser ONBs, was wegen (iii) oben ein ONS ist. Sei $F = \overline{\operatorname{Lin}\mathcal{B}}$. Da die Eigenräume invariant unter $T$ und (wegen (ii) oben) $T^*$ sind, ist $F$ invariant unter $T$ und $T^*$, folglich auch $F^\perp$. Der Operator $T_{|F^\perp}$ ist normal und kompakt. $F^\perp$ enthält keinen Eigenvektor von $T$, da $F$ alle Eigenvektoren enthält. Wäre $F^\perp \neq \{0\}$, so wäre entweder $T_{|F^\perp} = 0$, was die Existenz eines Eigenvektors zum Eigenwert 0 implzierte und deshalb nicht sein kann, oder $T_{|F^\perp} \neq 0$, was wegen $r(T_{|F^\perp}) = \|T_{|F^\perp}\|$ und Satz 5.3.3 die Existenz eines Eigenwerts $\lambda$ mit $|\lambda| = r(T_{|F^\perp}$ und somit auch eines zughörige Eigenvektors implizierte, was ebenfalls nicht sein kann. Somit gilt $F^\perp = \{0\}$, also $F = H$, d.h. $\mathcal{B}$ ist eine ONB von $H$. □

**Proposition 5.3.5.** *Sei $E$ normiert, $T \in K(E)$ und $\{\lambda_n\}$ eine Folge voneinander verschiedener Eigenwerte von $T$. Dann gilt: $\lambda_n \to 0$.*

*Beweis.* (a) Seien $\varphi_i$ zu $\lambda_i$ gehörige normierte Eigenvektoren von $T$ für jedes $i$. Wir zeigen, daß die $\varphi_i$ linear unabhängig sind. Wenn nicht, gäbe ein kleinstes $n \in \mathbb{N}$ mit $\varphi_n = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i\varphi_i$ , woraus $0 = (T - \lambda_n)\varphi_n = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i(\lambda_i - \lambda_n)\varphi_i$ folgt, was wegen $\lambda_i \neq \lambda_n$ die lineare Abhängigkeit von $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ bedeutete, ein Widerspruch.

(b) Sei $E_i$ der von $\varphi_1, \ldots, \varphi_i$ aufgespannte Teilraum für jedes $i$. Wähle $g_i$ aus der Einheitskugel von $E_i$ so, dass $\inf_{x \in E_{i-1}} \|g_i - x\| \geq \frac{1}{2}$ ist. Da jedes $g_i$ eine Linearkombination von $\varphi_1, \ldots, \varphi_i$ ist, gilt $\|Tg_i - Tg_{i-k}\| = \|\lambda_i \alpha_i \varphi_i +$ Vektor aus $E_{i-1}\| = \|\lambda_i g_i +$ Vektor aus $E_{i-1}\| \geq \frac{1}{2}|\lambda_i|$. Wäre nun $\{\lambda_{i'}\}$ eine Teilfolge von $\{\lambda_i\}$ mit $|\lambda_{i'}| \geq c > 0$, so erhielten wir durch Betrachtung der zugehörigen $g_i$ offensichtlich

$$\|Tg_{i'} - Tg_{(i-k)'} \geq \frac{1}{2}|\lambda_{i'}| \geq \frac{c}{2},$$

d.h. $\{T_{i'}\}$ könnte keine konvergente Teilfolge haben, was der Kompaktheit von $T$ widerspräche. Folgich gilt: $\lambda_n \to 0$.

□

**Proposition 5.3.6.** *Sei $T \in B(E)$, $T' \in B(E')$ sein dualer Operator.*

*(a) Es gilt: $\sigma(T') \subset \sigma(T)$.*

*(b) Es gilt: $\sigma_p(T) \subset \sigma(T')$.*

*(c) Für $T \in K(E)$ gilt: $\sigma(T) = \sigma(T')$ und $\sigma_p(T) \setminus \{0\} = \sigma_p(T') \setminus \{0\}\|$.*

*Beweis.* (a) Ist $A \in B(E)$ mit $A(\lambda - T) = (\lambda - T)A = \mathrm{Id}_E$, so folgt $(\lambda - T')A' = A'(\lambda - T') = \mathrm{Id}_{E'}$, also gilt $\rho(T) \subset \rho(T')$ und somit $\sigma(T) \supset \sigma(T')$.

(b) Ist $\lambda \in \sigma_p(T)$, so sei $0 \neq x \in E$ mit $T_\lambda x = 0$. Für beliebiges $\varphi \in E'$ gilt: $(T'_\lambda \varphi)(x) = \varphi(T_\lambda x) = \varphi(0) = 0$. Ist nun $\psi \in E'$ mit $\psi(x) = 1$, so gilt also $\psi \neq T'_\lambda \varphi \ \forall \varphi \in E'$ , d.h. $T'_\lambda$ ist nicht surjektiv, also $\lambda \in \sigma(T')$.

(c) Wegen (a),(b) und Satz 5.3.3 gilt $\sigma_p(T) \setminus \{0\} = \sigma_p(T') \setminus \{0\}$. Gilt $0 \in \rho(T')$, so gibt es $A \in B(E')$ mit $T'A = \mathrm{Id}_{E'}$. Dann ist $\mathrm{Id}_{E'}$ kompakt, also $E'$ und somit $E$ endlich-dimensional und deshalb $\sigma(T) = \sigma(T')$. Gilt $0 \in \sigma(T')$, so folgt mit (a) $0 \in \sigma(T)$, also $\sigma(T) = \sigma(T')$.

□

**Bemerkung.**

(i) Ist $E$ ein Banachraum, so gilt in (a) oben stets $\sigma(T') = \sigma(T)$ (siehe 2.3.8).

(ii) Die Implikation $0 \in \sigma_p(T) \Leftrightarrow 0 \in \sigma_p(T')$ ist in beide Richtungen falsch, selbst für kompakte $T$ .

## Fredholmsche Alternative

**Proposition 5.3.7.**

*(i) Wie das Argument in Teil (c) der letzten Proposition 5.3.6 zeigt, impliziert $0 \in \rho(T)$ für $T \in K(E)$, daß $\dim E < \infty$ gilt. Also gilt für $T \in K(E)$ stets $0 \in \sigma(T)$, wenn $E$ unendlich-dimensional ist.*

*(ii) Für $T \in K(E)$ und $\lambda \neq 0$ gilt*

$$T_\lambda \text{ surjektiv} \iff T_\lambda \text{ injektiv} .$$

*Beweis.* "$\Rightarrow$" Aus $R(T_\lambda) = E$ folgt $N(T'_\lambda) = R(T_\lambda)^\circ = \{0\}$, also $\lambda \notin \sigma_p(T')$ und somit nach Proposition 5.3.6 (c) $\lambda \notin \sigma_p(T)$.

"$\Leftarrow$"folgt aus Satz 5.3.4. □

Die obige Äquivalenz wird auch als **Fredholmsche Alternative** formuliert: Entweder ist die Gleichung $T_\lambda x = y$ für jedes $y \in E$ lösbar (sogar eindeutig), oder die Gleichung $T_\lambda x = 0$ hat eine nichttriviale Lösung.

**Lemma 5.3.8.** *Sei $E$ normiert, $T \in K(E)$ und $0 \neq \lambda \in \sigma_p(T)$. Dann gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $E = N(T_\lambda^n) \oplus R(T_\lambda^n)$. Die beiden Teilräume sind $T$ -invariant und abgeschlossen und die Summennorm ist zur ursprünglichen Norm auf $E$ äquivalent.*

*Beweis.* Es gilt $E \supset R(T_\lambda) \supset R(T_\lambda^2) \supset R(T_\lambda^3) \supset \dots$ Ab einer bestimmten Stelle muss $=$ statt $\supset$ gelten (sonst wäre $T$ nicht kompakt, vgl. den Beweis des Satzes 5.3.3). Gelte also $R(T_\lambda^n) = R(T_\lambda^{n+1})$. Offenbar sind $N(T_\lambda^n)$ und $R(T_\lambda^n)$ invariant unter $T_\lambda$ (also auch unter $T$ ), und sie sind abgeschlossen, da $T_\lambda^n = \lambda^n - S$ mit einem $S \in K(E)$ (vgl. Lemma 5.3.1 oben). Es gilt $\dim N(T_\lambda^n) < \infty$ , denn auf $N(T_\lambda^n)$ ist $S = \lambda^n \cdot \mathrm{Id}$, und $S$ ist kompakt. Wegen $T_\lambda R(T_\lambda^n) = R(T_\lambda^n)$ ist $T_\lambda|_{R(T_\lambda^n)}$ invertierbar (vgl. Proposition 5.3.7 (b) oben). Sei nun $x \in E$, also $z = T_\lambda^n x \in R(T_\lambda^n)$. Ist $y \in R(T_\lambda^n)$ mit $T_\lambda^n y = z$, so folgt $T_\lambda^n(x - y) = 0$, also $x - y \in N(T_\lambda^n)$ und somit $x \in N(T_\lambda^n) + R(T_\lambda^n)$. Die Summendarstellung ist eindeutig, denn für $u \in N(T_\lambda^n) \cap R(T_\lambda^n)$ gilt $T_\lambda^n u = 0$, und wegen der Injektivität von $T_\lambda^n$ auf $R(T_\lambda^n)$ auch $u = 0$. Somit gilt $E = N(T_\lambda^n) \oplus R(T_\lambda^n)$. Die Projektion $P : n+r \mapsto r$ von $E$ auf $R(T_\lambda^n)$ lässt sich in der Form $(T_\lambda^n|_{R(T_\lambda^n)})^{-1} T_\lambda^n$ schreiben, ist also stetig. Für $x = n + r$ mit $n \in N(T_\lambda^n)$ und $r \in R(T_\lambda^n)$ gilt nun $\|x\| = \|n + r\| \leq \|n\| + \|r\| \leq \|(1 - P)x\| + \|Px\| \leq c\|x\| + c_0\|x\| = const \cdot \|x\|$, was die behauptete Äquivalenz der Normen zeigt. □

**Satz 5.3.9.** *Sei $E$ normiert und $T \in K(E)$. Sei $\lambda \neq 0$ ein Eigenwert von $T$ (also auch von $T'$ (siehe Proposition 5.3.6 (c) )). Dann gilt:*

*(i)* $\dim N(T_\lambda) = \dim N(T'_\lambda) < \infty$

*(ii)* $R(T_\lambda) = {}^\circ N(T'_\lambda)$, *oder anders gesagt: Es gibt eine Lösung $x$ von $(\lambda - T)x = y \Leftrightarrow$ für jedes $\varphi \in E'$ mit $T'\varphi = \lambda\varphi$ gilt: $\varphi(y) = 0$.*

*(iii)* $R(T'_\lambda) = N(T_\lambda)^\circ$ , *oder anders gesagt: Es gibt eine Lösung $\varphi$ von $(\lambda - T')\varphi = \psi \Leftrightarrow$ für jedes $x \in E$ mit $Tx = \lambda x$ gilt: $\psi(x) = 0$.*

*Beweis.*

(i) Eigenräume kompakter Operatoren zu einem Eigenwert $\lambda \neq 0$ sind stets endlich-dimensional (da $T$ auf $N(T_\lambda)$ gleich $\lambda \cdot \mathrm{Id}_{N(T_\lambda)}$ ist). Nach dem Lemma hat $T_\lambda$ die Gestalt

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \text{ auf } E = N(T_\lambda^n) \oplus R(T_\lambda^n)$$

und $T'_\lambda$ die Gestalt

$$\begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & B' \end{pmatrix} \text{ auf } N(T_\lambda^n)' \oplus R(T_\lambda^n)' \cong E'$$

Da $B$ und folglich auch $B'$ invertierbar ist, gilt $\dim N(T_\lambda) = \dim N(A) = \dim N(A') = \dim N(T'_\lambda)$, wobei die mittlere Gleichheit aus den bekannten Tatsachen für lineare Abbildungen endlich-dimensionaler Räume folgt.

(ii) Wie wir wissen (Korollar 2.3.10) ist $R(T_\lambda) = \overline{R(T_\lambda)} = {}^\circ N(T'_\lambda)$.

(iii) $R(T'_\lambda) \subset N(T_\lambda)^\circ$ folgt aus $< T'_\lambda \varphi, n >=< \varphi, T_\lambda n >=< \varphi, 0 >= 0$, wobei $\varphi \in E', n \in N(T\lambda)$. Sei nun $\psi \in N(T_\lambda)^\circ$. Durch $\dot\psi(x+N(T_\lambda)) := \psi(x)$ wird auf $E/N(T_\lambda)$ ein stetiges lineares Funktional $\dot\psi$ definiert. Aus Lemma 5.3.2 wissen wir, daß $\dot x \mapsto T_\lambda x$ ein bistetiger Isomorphismus von $E/N(T_\lambda)$ auf $R(T_\lambda)$ ist. Also ist das Funktional $f : T_\lambda x \mapsto \dot\psi(\dot x) = \psi(x)$ auf $R(T_\lambda)$ stetig, d.h. es gibt ein $C > 0$ mit $|f(T_\lambda)| = |\psi(x)| \leq C\|T_\lambda\|$, $\forall x \in E$. Nach Hahn-Banach lässt sich $f$ zu einem $\varphi \in E'$ fortsetzen. Da $(T'_\lambda)(x) = \varphi(T_\lambda x) = f(T_\lambda x) = \psi(x)$ für $x \in E$, gilt $T'_\lambda \varphi = \psi$, also $\psi \in R(T_\lambda)$

□

## 5.4 Übungen, Beispiele, Ergänzungen

**Übung 5.4.1.** *Sind $A$ und $B$ normiert und ist $V = A \oplus B$ mit der Summennorm $\|(a,b)\| = \|a\| + \|b\|$, so ist $V'$ isometrisch isomorph zu $A' \oplus B'$ mit der Maximumsnorm $\|(\chi,\psi)\| = max\{\|\chi\|, \|\psi\|\}$ vermöge der Abbildung $\varphi \mapsto (\varphi_{|A}, \varphi_{|B})$.*

**Übung 5.4.2.** *Auf $L^2([0,1])$ betrachte man den durch das unbestimmte Integral gegebenen Operator*

$$J : f \mapsto (x \mapsto \int_o^x f(t)dt).$$

*Man zeige, daß $J$ kompakt ist und bestimme seine Spektralzerlegung.*

**Übung 5.4.3.** *Das Quadrat $[0,1] \times [0,1]$ sei mit dem zweidimensinalen Lebesguemaß versehen und $t \in L^2([0,1] \times [0,1])$. Sei $T \in B(L^2([0,1]))$ definiert durch*

$$Tf(x) = \int_0^1 t(x,y)f(y)\,dy \text{ für } x \in [0,1].$$

*Man zeige, daß $T$ kompkt ist.*

# Anhang A

# Topologie

In diesem Appendix beschreiben wir die Grundzüge der mengentheoretischen Topologie in dem Umfang, wie es für das Verständnis des Skripts notwendig ist. Allgemeine topologische Räume verallgemeinern metrische Räume und es zeigt sich, dass viele Konzepte sich in den allgemeinen Rahmen übertragen lassen. Jedoch benötigt man den Begriff des Netzes, um einen fruchtbaren Begriff der Konvergenz in allgemeinen topologischen Räumen zu haben. Sei $X$ eine Menge, $\mathcal{P}(X)$ ihre Potenzmenge und $\Omega \subset \mathcal{P}(X)$. **Definition:** $\Omega$ heißt eine Topologie auf $X$, wenn

(i) $\emptyset \in \Omega$ und $X \in \Omega$.

(ii) $O_1, O_2 \in \Omega \Rightarrow O_1 \cap O_2 \in \Omega$.

(iii) $F \subset \Omega \Rightarrow \left(\bigcup_{O\in F} O\right) \in \Omega$.

Ist $\Omega$ eine Topologie auf $X$, so heißt $X$ oder genauer, $(X, \Omega)$, ein ***topologischer Raum*** und die Elemente von $\Omega$ heißen ***offene Mengen*** (der Topologie $\Omega$) in $X$. Die Komplemente offener Mengen heißen ***abgeschlossene Mengen***:
**Bemerkung:**

(a) Für die abgeschlossenen Mengen gilt

  (i) $\emptyset$ und $X$ sind abgeschlossen

  (ii) die Vereinigung zweier abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen

  (iii) der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.

(b) $\emptyset$ und $X$ sind in jeder Topologie offen und abgeschlossen zugleich.

(c) Es gibt zwei ausgezeichnete Topologien, nämlich die ***diskrete Topologie*** $\Omega = \mathcal{P}(X)$ und die ***indiskrete Topologie*** $\Omega = \{\emptyset, X\}$.

(d) Ist $(X, \Omega)$ ein topologischer Raum und $A$ eine Teilmenge von $X$, so gibt es auf $A$ eine natürliche Topologie, nämlich $\Omega_A = \{O \cap A | O \in \Omega\}$, genannt die ***relative Topologie*** oder ***Unterraumtopologie*** von $A$.

**Definition:** Sind $\Omega$ und $\Omega'$ zwei Topologien auf $X$, so heißt $\Omega$ ***stärker*** (oder: ***feiner***) als $\Omega'$ und $\Omega'$ ***schwächer*** (oder: ***gröber***) als $\Omega$, wenn $\Omega \supset \Omega'$ gilt. Für $A \subset \mathcal{P}(X)$ ist die ***von A erzeugte Topologie*** die gröbste Topologie $\Omega$ mit $A \subset \Omega$. Offenbar gilt $O \in \Omega$ genau dann, wenn $O$ beliebige Vereinigung endlicher Durchschnitte von Elementen aus $A$ ist (man beachte dabei, daß die leere Vereinigung leer, der leere Durchschnitt der ganze Raum $X$ ist). Ist $Y$ eine Menge, $\{(X_\lambda, \Omega_\lambda)\}$ eine Familie topologischer Räume und $\{f_\lambda\}$ eine Familie von Abbildungen $f_\lambda : Y \to X_\lambda$, so ist die von $\{f_\lambda\}$ ***auf* Y *induzierte Topologie*** die gröbste Topologie auf $Y$, die alle $f_\lambda$ stetig macht (siehe unten), d.h. die von $\bigcup_\lambda \left(f^{-1}(\Omega_\lambda)\right)$ erzeugte Topologie (hierbei ist natämlich $f^{-1}(\Omega_\lambda) = \{f^{-1}(O) \mid O \in \Omega_\lambda\}$).

Sei $(X, \Omega)$ ein topologischer Raum.

**Definition:** Für $M \subset X$ ist der ***offene Kern*** $M^0$ von $M$ die Vereinigung aller offenen Mengen, die in $M$ enthalten sind. Es ist die größte offene Menge, die in $M$ enthalten ist. Der ***Abschluß*** $\overline{M}$ von $M$ ist der Durchschnitt aller abgeschlossenen Mengen, die $M$ enthalten. Es ist die kleinste abgeschlossene Menge, die $M$ enthält. Eine Menge $D$ mit $\overline{D} = X$ heißt ***dicht*** in $X$, eine Menge $N$ mit $(\overline{N})^0 = \emptyset$ heißt ***nirgends dicht***. $E$ heißt Menge ***von 1. Kategorie***, wenn $E$ abzählbare Vereinigung von irgends dichten Mengen ist. $E$ heißt Menge ***von 2. Kategorie***, wenn $E$ nicht von 1. Kategorie ist.

**Definition:** Sei $(X, \Omega)$ ein topologischer Raum und $a \in X$. Eine Menge $U \subset X$ heißt ***Umgebung von* a**, wenn es eine offene Menge $V \subset U$ mit $a \in V$ gibt. Ist $M$ eine Teilmenge von $X$, so heißt $a$ ein ***Berührungspunkt*** von $M$, wenn jede Umgebung $U$ von $a$ die Menge $M$ trifft, d.h. $U \cap M \neq \emptyset$ ist. Man nennt $a$ einen ***inneren Punkt*** von $M$, wenn $M$ eine Umgebung von $a$ enthält.

**Bemerkung:** Der Abschluß von $M$ ist gleich der Menge der Berührungspunkte von $M$. Der offene Kern von $M$ ist gleich der Menge der inneren Punkte von $M$.

**Definition:** Eine Teilmenge $K$ des topologischen Raumes $(X, \Omega)$ heißt ***kompakt*** (in der französischen Literatur: quasikompakt), wenn jede Überdeckung von $K$ mit offenen Mengen schon eine Überdeckung durch endlich viele dieser Mengen zuläßt. Eine Menge heißt ***relativ kompakt***, wenn ihr Abschlußkompakt ist.

**Definition:** Sind $(X, \Omega)$ und $(X', \Omega')$ topologische Räume und $f$ eine Abbildung von $X$ nach $Y$, so heißt $f$ ***stetig***, wenn das Urbild $f^{-1}(O')$ jeder in $X'$ offenen Menge $O'$ offen in $X$ ist (d.h. wenn gilt: $O' \in \Omega' \Rightarrow f^{-1}(O') \in \Omega$). Die Abbildung $f$ heißt ***stetig im Punkt*** $\mathtt{p} \in \mathtt{X}$, wenn das Urbild jeder Umgebung von $f(p)$ eine Umgebung von $p$ ist (Äquivalent: wenn es zu jeder Umgebung $V$ von $f(p)$ eine Umgebung $U$ von $p$ mit $f(U) \subset V$ gibt).

**Bemerkung:** Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist stetig genau dann, wenn sie in jedem Punkt von $X$ stetig ist.

**Bemerkung:** Das Bild einer kompakten Menge unter einer stetigen Abbildung

ist kompakt.
**Definition:** Eine Menge $M$ mit einer Relation $\geq$ heißt ***gerichtete Menge***, wenn gilt:

(i) $x \geq y,\ y \geq z \to x \geq z$

(ii) $\forall x, y \in M\ \exists z \in M$ mit $z \geq x, z \geq y$.

**Definition:** Ein ***Netz*** in einer Menge $X$ ist eine Abbildung von einer gerichteten Menge $\Lambda$ nach $X$. Sie wird meist in der Form $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ oder einfach $\{x_\lambda\}$ notiert. Ein Netz $\{y_\alpha\}_{\alpha\in A}$ heißt ***Teilnetz*** von $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, wenn es eine Abbildung $n : A \to \Lambda$ gibt mit $x_{n(\alpha)} = y_\alpha\ \forall\ \alpha \in A$ und der Eigenschaft, daß für jedes $\lambda \in \Lambda$ ein $\alpha_0 \in A$ existiert mit $n(\alpha) \geq \lambda\ \forall\ \alpha \geq \alpha_0$.
**Definition:** Ist $(X, \Omega)$ ein topologischer Raum, $a \in X$ und $\{x_\lambda\}$ ein Netz in $X$, so ***konvergiert*** $\{x_\lambda\}$ gegen $a$ (kurz: $x_\lambda \to a$), wenn gilt:

$$\forall\ O \in \Omega \text{ mit } x \in O\ \exists\lambda_0 \text{ mit } x_\lambda \in 0 \quad \forall\ \lambda \geq \lambda_0.$$

**Bemerkung:**

a) Konvergiert $\{x_\lambda\}$ gegen $a$ in $(X, \Omega)$, so konvergiert auch jedes Teilnetz gegen $a$.

b) Ist $(X, \Omega)$ ein topologischer Raum, $a \in X$ und $A \subset X$, so ist $a \in \overline{A}$ genau dann, wenn es ein Netz $\{x_\lambda\}$ in $A$ mit $x_\lambda \to a$ gibt.

c) $A$ ist abgeschlossen in $X$ genau dann, wenn für jedes Netz $\{x_\lambda\}$ in $A$ aus $x_\lambda \to a \in X$ schon $a \in A$ folgt.

d) $K$ ist kompakt in $X$ genau dann, wenn jedes Netz in $K$ ein in $K$ konvergentes Teilnetz besitzt.

e) Eine Abbildung $f$ zwischen zwei topologischen Räumen ist genau dann stetig, wenn $f(x_\lambda) \to f(x)$ gilt für jedes Netz $\{x_\lambda\}$ mit $x_\lambda \to x$.

Im Fall halbmetrischer Räume (siehe weiter unten) bleibt a) - e) oben richtig, wenn man "Netz" durch "Folge" und "Teilnetz" durch "Teilfolge" ersetzt.
**Vorsicht:** Jede Folge ist ein Netz und jede Teilfolge davon ein Teilnetz, aber ein Teilnetz von einer Folge braucht keine Folge mehr zu sein.

Produkt topologischer Räume: Ist $\{(X_\lambda, \Omega_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ eine Familie topologischer Räume, so definiert man auf dem Produktraum $X = \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ eine Topologie $\Omega$ folgendermaßen: $O \in \Omega \leftrightarrow O$ ist beliebige Vereinigung von Mengen der Form $\prod_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda$,

# Literaturverzeichnis

[1] N. Dunford and J. T. Schwartz. *Linear Operators I–III.* John Wiley, 1988.

[2] K. Floret. *Maß- und Integrationstheorie.* Teubner, 1981.

[3] H. Heuser. *Funktionalanalysis.* Teubner, 1992.

[4] J. L. Kelly. *General Topologiy.* van Nostrand reprinted by Springer-Verlag, 1955.

[5] M. Leinert. *Integration und Maß.* Springer-Fachmedien, Wiesbaden, 1995. ursprünglich von vieweg publiziert.

[6] M. Reed and B. Simon. *Modern Methods of Mathmatical Physics, Vol. I Functional analysis.* Elsevier, 1972.

[7] W. Rudin. *Functional Analysis.* McGraw-Hill Book Company, 1973.

[8] A. E. Taylor. *Introduction to Functional Analysis.* John Wiley, 1958.

[9] B. von Querenburg. *Mengentheoretische Topologie.* Springer-Verlag, 1976.

[10] D. Werner. *Funktionalanalysis.* Springer, 1995.

[11] K. Yosida. *Functional Analysis.* Springer-Verlag, 1978.

Die verwendeten Ergebnisse der Maßtheorie findet der Leser in [5], [2], die der mengentheoretischen Topologie in [9], [4]. Eine Auswahl klassischer lesenswerter Texte zur Funktionalanalysis: [6], [8], [7], [3], [10], [1], [11].

# Index

Dieses Lehrbuch der Funktionalanalysis basiert auf Vorlesungen, die der Autor an der Universität Heidelberg gehalten hat. Es setzt Grundkenntnisse in linearer Algebra und Analysis voraus. Nach einer Einführung in metrische und normierte Räume (einschließlich Operatoren und Funktionale) folgt ein eigenes Kapitel über Hilberträume. Den Hauptteil bildet eine ausführliche Diskussion der Spektraltheorie in Banach-Algebren (insbesondere C*-Algebren). Das letzte Kapitel behandelt kompakte Operatoren. Das Buch schließt mit einem Anhang über notwendige Begriffe und zentrale Resultate der mengentheoretischen Topologie. Durch die umfangreiche Sammlung von Übungsaufgaben und Beispielen ist es auch zum Selbststudium geeignet.

**UNIVERSITÄT**
**HEIDELBERG**
ZUKUNFT
SEIT 1386