EINIGE BEMERKUNGEN ÜBER POLYEDRISCHE GLOBEN

von KAREL KUCHAŘ

Einen grundlegenden Lehrsatz für alle Benutzer von Karten sprach zu Ende des Mittelalters der Kardinal PIERRE D'AILLY aus: „Imago seu mappa mundi, licet figuretur in plano, tamen debet imaginari esse in sphaerico." In der damaligen Zeit wurde diese These, die auch CHRISTOPH KOLUMBUS wörtlich übernahm, im Globus BEHAIMS materialisiert.

Von dieser Zeit an werden die Kugelgloben als treueste Nachahmung des Erdkörpers ununterbrochen benutzt. Der Hauptvorteil des Kugelglobus ist seine geometrische Ähnlichkeit zur Erdkugel. Die Erfüllung dieser Ähnlichkeit stellte immer große Forderungen sowohl an die Konstruktion der Globuskarte als auch an die Technologie der Globusherstellung. Die Konstruktion von Kartensegmenten wurde zwar mit befriedigender Annäherung gleich am Anfang des 16. Jh. gelöst, jedoch bereits damals dachten die Künstler, die sich mit Geometrie befaßten, an den Ersatz der Kugelfläche durch die Oberfläche eines platonischen Polyeders. Die größte Ähnlichkeit zur Kugel unter diesen hat der dreieckige Zwanzigflächner. Das bemerkte schon im Jahre 1538 ALBRECHT DÜRER.

Der Gedanke, die Kugelfläche und die auf sie montierten Globussegmente durch ein Polyeder mit gnomonischer Projektion der Globusteile an seinen Wänden zu ersetzen, erschien in den letzten hundert Jahren mehrmals, aber die Geschichte der Globographie beachtete diese Bestrebungen nicht, so daß wir weder ein Verzeichnis der polyedrischen Globen noch eine Bibliographie der Arbeiten, die sich mit ihrer Lösung befassen, besitzen. Für die mathematische Kartographie ist die Konstruktion polyedrischer Globen eine Applikation gnomonischer Projektionen, aber die Lösungen dieser Globen sind nicht einmal in den Kompendien der Kartenentwurfslehre zusammengefaßt. Ich halte es deshalb für angebracht, auf die platonischen und einige andere Polyeder aufmerksam zu machen, d. h. auf die Möglichkeit, die diese Richtung der Globographie zur Verfügung hat, und dabei auch auf die Vor- und Nachteile der polyedrischen Globen im Vergleich zu den Kugelgloben.

Die ganze Oberfläche des Kugelglobus kann durch die gnomonische Projektion auf jedem Globus, dem ein reguläres Polyeder umbeschrieben ist, veranschaulicht werden: auf einem Tetraeder, Würfel, Oktaeder, Dodekaeder oder Ikosaeder. Die Länge der Seite a dieser Vielflächner und die geographische Breite φ der Berührungspunkte (Konstruktionspole gnomonischer Karten in der allgemeinen Lage) führe ich in der folgenden Tabelle an, und zwar für den Fall, daß die geographische

Achse des Globus von dem Halbmesser r durch die zwei gegenüberliegenden Gipfel des umbeschriebenen Polyeders geht, also die Anordnung, die der Absicht, die Vorstellung einer Kugel hervorzurufen, am besten entspricht, abgesehen vom Tetraeder, das wir hier nur der Vollständigkeit wegen anführen.

Vielflächner		Seite des n-Ecks	φ der Berührungspunkte
Tetraeder	$n = 3$	$a = 4{,}89898r$	$+19°\ 28'\ 16''$ und $-90°\ 0'\ 0''$
Würfel	$= 4$	$= 2{,}00000r$	
Oktaeder	$= 3$	$= 2{,}44949r$	$\pm 35°\ 15'\ 52''$
Dodekaeder	$= 5$	$= 0{,}89806r$	
Ikosaeder	$= 3$	$= 1{,}32318r$	$\pm 52°\ 37'\ 22''$ und $\pm 10°\ 48'44''$

Die Oberfläche dieser Vielflächner ist natürlich größer als die Oberfläche des Kugelglobus mit dem Radius r. Diese Vergrößerung des Bildes (Koeffizient k_0 in der nächsten Tabelle) ist allerdings weitaus kleiner als die Flächenverzerrung in den Stellen, wo sie die maximalen Werte $k_{\max}$ erreicht, d. h. in den Gipfeln der Vielflächner; eine Nullverzerrung gibt es an den Berührungspunkten (in der Mitte der Flächen).

Tetraeder	$k_0 = 3{,}308$	$k_{f\,\max} = 27{,}018$
Würfel	$= 1{,}910$	$= 5{,}195$
Oktaeder	$= 1{,}654$	$= 5{,}195$
Dodekaeder	$= 1{,}325$	$= 1{,}993$
Ikosaeder	$= 1{,}207$	$= 1{,}993$

Wenn wir diese Verzerrungen z. B. auf den Flächen des Ikosaeders mit den Verzerrungen auf den Weltkarten vergleichen, dann sind die Ergebnisse keinesfalls für die polyedrische Abbildung ungünstig.

Neben den angeführten regelmäßigen Vielflächnern verwendet man auch andere, z. B. das rhombische Dodekaeder, dessen 12 rhombische Flächen den Globus in 4 Punkten des Äquators und in 4 Punkten der Parallelkreise $\pm 45°$ berühren. Die polyedrischen Globen eignen sich als Schul- und Popularisierungsbehelfe bei der Erklärung der gnomonischen Abbildung, aber man kann mit ihnen auch den Orthodromenverlauf zwischen jeden beliebigen zwei Punkten der Globusoberfläche lösen, und das besser als auf dem Kugelglobus. Ich selbst habe vor Jahren einen solchen Globus vorgeschlagen (K. Kuchař: Svet na dvanáctistenu [Die Welt auf dem Dodekaeder], Prag 1950). Einen anderen Versuch dieser Art kenne ich aus Polen, und zweifellos würde man bei systematischem Suchen Dutzende finden. Literaturangaben sind in der Studie von Irwing Fisher in „Geographical Review, 1943" enthalten. Es würde nicht schaden, eine diesbezügliche Bibliographie zusammenzustellen, schon um zu verhindern, daß dasselbe wiederholt ausgedacht wird, sicherlich jedes Mal mit Zeit- und Kraftaufwand.

Die zwanzig Flächen des Ikosaeders sind die größte Flächenanzahl, die man auf einem regelmäßigen Vielflächner erzielen kann. Man kann den Globus nicht auf

eine größere Anzahl gleich großer, regelmäßiger, von Orthodromen begrenzter sphärischer Bilder aufteilen. Trotzdem werden in der Kartographie Versuche unternommen, die Flächenanzahl der Körper zu vergrößern, auf die wir die Globusoberfläche projizieren könnten. Dies geschieht aber um den Preis, daß diese Flächen untereinander nicht gleich sein werden. Man benutzt gewöhnlich eine Kombination zweier regelmäßiger Vielflächner. So kann man z. B. die 8 Ecken des Würfels mit den Flächen eines Oktaeders so abstumpfen, daß ein Körper mit 6 quadratischen und 8 dreieckigen Flächen entsteht. Dabei schadet es nicht, daß die dreieckigen Flächen, die zum Oktaeder gehören, den Kugelglobus, dem der ursprüngliche Würfel umbeschrieben war, nicht berühren. Auch auf sie kann man gnomonisch projizieren, nur ändert sich etwas der numerische Maßstab der Karten.
Es ist zweifellos ein Vorteil der polyedrischen Globen, daß ihre Netze jeder konstruieren kann, der das mathematische oder geometrische Wesen der gnomonischen Projektion kennt. Um das Ausrechnen ökonomisch zu gestalten, haben wir die geographische Breite der Berührungspunkte in der oben angeführten Tabelle angegeben. Sie ermöglichen, das geographische Netz der Meridiane und der Parallelkreise geometrisch zu zeichnen und bei den Schulübungen aus Geometrie und Geographie die geographischen Konturen einzuzeichnen. Die Schwierigkeiten beim Montieren von Vielflächnern sind nie so groß wie beim Montieren von Globuskarten auf eine Kugel, sie wachsen aber mit der Anzahl der Flächen.
Es scheint bisher, daß man praktisch noch mit dem Polyeder rechnen kann, der aus dem Ikosaeder dadurch entsteht, daß man seine 12 Ecken mit den Flächen eines Dodekaeders abstumpft. So bekommen wir einen Körper, der von 20 regelmäßigen Sechsecken begrenzt ist, die den Kugelglobus berühren, und von 12 regelmäßigen Fünfecken — im ganzen 32 Flächen —, die untereinander so verbunden sind, wie wir das bei den neuen Sportbällen kennen. Die fünfeckigen Flächen berühren zwar den Kugelglobus nicht, aber auch hier ist das für die gnomonische Projektion nicht von Nachteil. Es ist wichtig, daß die Verzerrung der Weltkarten auf den Flächen dieses Körpers bedeutend kleiner ist als die Verzerrung auf zwei platonischen Körpern, die hier kombiniert sind. Die Oberfläche dieses Globus ist nur das 1,124fache der Globusfläche.
Ich weiß, daß die Liebhaber wunderbarer alter Globen und eleganter moderner Globen von dem letzten Teil meiner Ausführungen über die kantigen Globen nicht begeistert sein können. Aber auch diese plebejischen Globen gehören in die Globenfamilie. Und auch wenn einmal die Zeit käme, daß jeder Schüler einen genügend großen Globus besitzen würde, auch dann würden diese Globen ihre methodische Bedeutung nicht verlieren, weil sie ein Bindeglied zwischen dem Globus und der Karte bilden, und deshalb, weil jeder Schüler, wenn er sie selbst montieren wird, über ihre Projektion und Konstruktion nachdenken muß.