21. Beispiele

1. Quadratsummen: Für $n \leq 8$ ist nach Kapitel 14 das Geschlecht von $\mathbb{Z}^n$ einklassig. Die Siegel'sche Formel liefert in diesem Falle Darstellungszahlen für das Gitter $\mathbb{Z}^n$ und nicht nur die über die Klassen im Geschlecht gemittelten Darstellungszahlen. Wir berechnen die $\alpha_p = p^{-m(n-1)} A_{p^m}(\mathbb{Z}^n, t)$. Der Einfachheit halber nehmen wir zunächst t quadratfrei und $\equiv 1 \bmod 8$.

$p = 2$: Mit Hensel genügt $m = 3$. Wegen $t \equiv 1 \bmod 8$ können wir die $A_8(n,t) := A_8(\mathbb{Z}^n, t)$ aus Kapitel 14 übernehmen.

n	2	3	4	5	6	7	8
$A_8(n,t)$	16	$3 \cdot 2^5$	2^9	$5 \cdot 2^9$	$3 \cdot 2^{13}$	$7 \cdot 2^{15}$	2^{21}
$\alpha_2 = 2^{-3(n-1)} A_8(n,t)$	2	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{8}$	1

$p \nmid 2t$: Diese $A_p(n,t)$ haben wir in Kapitel 10 berechnet:

$$A_p(n,t) = \begin{cases} p^{n-1} - (\frac{-1}{p})^{\frac{n}{2}} p^{\frac{n}{2}-1} & \text{wenn } n \text{ gerade} \\ p^{n-1} + (\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}} t}{p}) p^{\frac{n-1}{2}} & \text{wenn } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Die α_p sind die $p^{-(n-1)}$-fachen davon.

$p | t$: Sei $m \geq 1$ und $(c,c) = \sum c_i^2 \equiv t \bmod p^m$, etwa $= t + p^m \gamma$ mit $\gamma \in \mathfrak{o}_p$. Dann ist

$$\sum (c_i + p^m y_i)^2 \equiv t + p^m \gamma + 2p^m \sum c_i y_i \bmod p^{m+1}$$

Ist c primitiv (i.e. nicht alle c_i durch p teilbar), so gibt es genau p^{n-1} modulo p verschiedene Lösungen y von $2 \sum c_i y_i + \gamma \equiv 0 \bmod p$. Zu jedem primitiven c mit $(c,c) \equiv t \bmod p^m$ gehören daher genau p^{n-1} Lösungen $c^* = c + p^m y$ mit $(c^*, c^*) \equiv t \bmod p^{m+1}$. Ist nun $m \geq 2$, so folgt aus $(c,c) \equiv t \bmod p^m$ und $p^2 \nmid t$ automatisch, daß c primitiv ist. Daher

(a) $$A_{p^{m+1}}(n,t) = p^{n-1} A_{p^m}(n,t) \text{ wenn } m \geq 2$$

Für $m = 1$ hat man sich auf die primitiven c zu beschränken, das heißt

(b) $A_{p^2}(n,t) = p^{n-1} \cdot$ Anzahl A_p^* der $c \bmod p$ mit $c \not\equiv 0 \bmod p$ und $\sum c_i^2 \equiv t \bmod p$

Wegen $p | t$ ist die letzte Anzahl die Zahl der isotropen Vektoren mod p. Diese entnehmen wir aus Kapitel 10 und erhalten aus (a) und (b)

$$\alpha_p = p^{-m(n-1)} A_{p^m}(n,t) = p^{-(n-1)} A_p^* =$$

$$p^{-(n-1)} \cdot \begin{cases} (p^{\frac{n}{2}} - (\frac{-1}{p})^{\frac{n}{2}})(p^{\frac{n}{2}-1} + (\frac{-1}{p})^{\frac{n}{2}}) & \text{wenn } n \text{ gerade} \\ p^{n-1} - 1 & \text{wenn } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Für gerades n setzen wir $\chi(p) = (\frac{-1}{p})$ und

$$\chi_n(p) = \chi(p)^{\frac{n}{2}} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } n \equiv 0 \bmod 4 \\ (\frac{-1}{p}) & \text{wenn } n \equiv 2 \bmod 4 \end{cases}$$

Für ungerades n setzen wir

$$\psi_n(p) = (\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}} t}{p}) = \begin{cases} (\frac{-t}{p}) & \text{wenn } n \equiv 3 \bmod 4 \\ (\frac{t}{p}) & \text{wenn } n \equiv 1 \bmod 4 \end{cases}$$

Für gerades n erhalten wir dann

$$\prod_{p \neq 2} \alpha_p = \prod_{p \nmid 2t} (1 - \chi_n(p) p^{-\frac{n}{2}}) \cdot \prod_{p \mid t} (1 - \chi_n(p) p^{-\frac{n}{2}})(1 + \chi_n(p) p^{1-\frac{n}{2}})$$

$$= \prod_{p \neq 2} (1 - \chi_n(p) p^{-\frac{n}{2}}) \cdot \prod_{p \mid t} (1 + \chi_n(p) p^{1-\frac{n}{2}})$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{1-2^{-\frac{n}{2}}} \cdot \zeta(\frac{n}{2})^{-1} \cdot \prod_{p \mid t} (1 + p^{1-\frac{n}{2}}) & \text{wenn } n \equiv 0 \bmod 4 \\ L(\frac{n}{2}, \chi)^{-1} \cdot \prod_{p \mid t} (1 + \chi(p) p^{1-\frac{n}{2}}) & \text{wenn } n \equiv 2 \bmod 4 \end{cases}$$

Für ungerades n wird

$$\prod_{p \neq 2} \alpha_p = \prod_{p \nmid 2t} (1 + \psi_n(p) p^{-\frac{n-1}{2}}) \cdot \prod_{p \mid t} (1 - p^{-(n-1)})$$

$$= \prod_{p \nmid 2t} \frac{1 - p^{-(n-1)}}{1 - \psi_n(p) p^{-\frac{n-1}{2}}} \cdot \prod_{p \mid t} (1 - p^{-(n-1)})$$

$$= L(\frac{n-1}{2}, \psi_n) \cdot \frac{1}{1 - 2^{-(n-1)}} \cdot \zeta(n-1)^{-1}$$

Wie eingangs bemerkt, ist das Geschlecht von $\mathbb{Z}^n$ einklassig für $n \leq 8$, und die Siegel'sche Formel lautet jetzt

$$A(\mathbb{Z}^n, t) = t^{\frac{n}{2}-1} \cdot \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \cdot \prod_p \alpha_p$$

Wir haben sie bewiesen für $n \geq 4$ (wir haben die Tamagawa-Zahl des Stabilisators eines Vektors eingesetzt).

$n = 4$:

$$A(\mathbb{Z}^4, t) = t \cdot \frac{\pi^2}{\Gamma(2)} \cdot \alpha_2 \cdot \prod_{p \neq 2} \alpha_p$$

$$= t \cdot \pi^2 \cdot \frac{1}{1 - 2^{-2}} \cdot \frac{1}{\zeta(2)} \cdot \prod_{p \mid t} (1 + p^{-1})$$

$$= 8\prod_{p|t}(p+1)$$

$n=6:$

$$A(\mathbb{Z}^6,t) = t^2 \cdot \frac{\pi^3}{\Gamma(3)} \cdot \frac{3}{4} \cdot L(3,\chi)^{-1} \prod_{p|t}(1+\chi(p)p^{-2})$$

$$= \frac{3}{8} \cdot \frac{\pi^3}{L(3,\chi)} \prod_{p|t}(p^2+\chi(p))$$

$n=8:$

$$A(\mathbb{Z}^8,t) = t^3 \cdot \frac{\pi^4}{\Gamma(4)} \cdot \frac{1}{1-2^{-4}} \cdot \frac{1}{\zeta(4)} \cdot \prod_{p|t}(1+p^{-3})$$

$$= 16 \cdot \prod_{p|t}(p^3+1)$$

Die Formeln für $n=4$ und 8 sind aus der Elementaren Zahlentheorie wohlbekannt.

Nun zu den ungeraden n:

$$A(\mathbb{Z}^5,t) = t^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{\pi^{\frac{5}{2}}}{\Gamma(\frac{5}{2})} \cdot \frac{5}{8} \cdot \prod_{p\neq 2}(1-p^{-4}) \cdot L(2,\psi)$$

$$= 80\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\pi^2} \cdot L(2,\psi)$$

mit $\psi(p) = (\frac{t}{p})$ für $p \dagger 2t$ (und $=0$ sonst). Dies ist das zweite Beispiel in [S],Seite 569.

$$A(t,\mathbb{Z}^7) = t^{\frac{5}{2}} \cdot \frac{\pi^{\frac{7}{2}}}{\Gamma(\frac{7}{2})} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{2^6}{2^6-1} \cdot \zeta(6)^{-1} L(3,\psi')$$

$$= 448 t^{\frac{5}{2}} \cdot \frac{L(3,\psi')}{\pi^3}$$

mit $\psi'(p) = (\frac{-t}{p})$ für $p \dagger 2t$.

Bemerkungen: 1. Die Voraussetzung $t \equiv 1 \bmod 8$ berührt nur α_2 und nicht die α_p für $p \neq 2$. Wenn $t \equiv 3,5$ oder $7 \bmod 8$, so finden wir für $A_8(\mathbb{Z}^n,t)$ für $n=4,5,6,7,8$ die Werte

$t\backslash n$	4	5	6	7	8
3	2^9	$5\cdot 2^{10}$	$5\cdot 2^{13}$	$5\cdot 7\cdot 2^{13}$	2^{21}
5	2^9	$7\cdot 2^9$	$3\cdot 2^{13}$	$7\cdot 2^{15}$	2^{21}
7	2^9	$5\cdot 2^{10}$	$5\cdot 2^{13}$	$37\cdot 2^{13}$	2^{21}

Für $n=5$ zum Beispiel müssen wir in der Formel für $A(\mathbb{Z}^5,t)$ nur den Faktor 80 durch 160 ersetzen, wenn $t \equiv 3$ oder $7 \bmod 8$ ist und durch $\frac{7}{5}\cdot 80 = 112$, wenn $t \equiv 5 \bmod 8$.

2. In der Formel für $A(\mathbb{Z}^6, t)$ setzen wir $t = 1$. Offenbar ist $A(\mathbb{Z}^6, 1) = 2 \cdot 6$, und das Produkt ist leer. Wir erhalten

$$2 \cdot 6 = \frac{3}{8} \cdot \frac{\pi^3}{L(3, \chi)}$$

also

$$L(3, \chi) = \frac{\pi^3}{32} \quad (\text{ siehe auch Seite 78 })$$

Dies können wir in die Formel einsetzen und erhalten

$$A(\mathbb{Z}^6, t) = 12 \cdot \prod_{p|t} (p^2 + \chi(p)) \text{ wenn } t \equiv 1 \bmod 8$$

Aus der obigen Tabelle entnehmen wir (weil $\chi(p) = (\frac{-1}{p})$): Für ungerade quadratfreie t gilt

$$A(\mathbb{Z}^6, t) = \begin{cases} 12 \cdot \prod_{p|t} (p^2 + (\frac{-1}{p})) & \text{wenn } t \equiv 1 \bmod 4 \\ 20 \cdot \prod_{p|t} (p^2 + (\frac{-1}{p})) & \text{wenn } t \equiv 3 \bmod 4 \end{cases}$$

Diese Formel findet sich (als Summe über die Teiler von t geschrieben) zum Beispiel in [H W], Seite 314.

Als letztes Beispiel zählen wir im Gitter E_8 die sogenannten Wurzeln, das sind die x mit $(x, x) = 2$.

Für alle $p \neq 2$ wird es $\mathfrak{o}_p^8$, und wir können die α_p von oben übernehmen:

$$\alpha_p = 1 - p^{-4} \text{ für } p \neq 2$$

Für $p = 2$ wird E_8 nach Kapitel 14 direkte Summe von vier hyperbolischen Gittern. Wir müssen bestimmen

$$|\{(\lambda_1, ..., \lambda_4, \mu_1, ...\mu_4) \bmod 2^m \mid 2 \sum_{i=1}^{4} \lambda_i \mu_i \equiv 2 \bmod 2^m\}|$$

$$= |\{(\lambda_1, ..., \lambda_4, \mu_1, ..., \mu_4) \bmod 2^m \mid \sum_{i=1}^{4} \lambda_i \mu_i \equiv 1 \bmod 2^{m-1}\}|$$

Für ein solches 8-Tupel sind nicht alle μ_i durch 2 teilbar. Es gibt also mod 2^m gerade $2^{4m} - 2^{4(m-1)}$ zulässige Quadrupel μ. In jedem solchen ist mindestens ein μ_i Einheit, etwa μ_1. Dann kann man $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ beliebig wählen, für jedes gibt es 2^m Möglichkeiten, und λ_1 muß die Kongruenz $\lambda_1 \mu_1 \equiv 1 - \sum_{i=2}^{4} \lambda_i \mu_i \bmod 2^{m-1}$ erfüllen, hat also mod 2^m zwei Möglichkeiten. Das ergibt

$$\alpha_2 = 2^{-7m} \cdot (2^{4m} - 2^{4(m-1)}) \cdot 2^{3m} \cdot 2 = \frac{15}{8}$$

Jetzt liefert die Formel

$$A(E_8, 2) = 2^3 \cdot \frac{\pi^4}{\Gamma(4)} \cdot \frac{15}{8} \cdot \prod_{p \neq 2} (1 - p^{-4}) = 240$$

und das ist in der Tat die Anzahl der Wurzeln in E_8 (wie man durch unmittelbares Abzählen anhand einer geeigneten Beschreibung von E_8 bestätigt).