18. Die Zetafunktion einer quadratischen Form

Die in diesem Kapitel ausgeführte Berechnung der Tamagawazahl der speziellen orthogonalen Gruppe ist den Abschnitten 4.4 und 4.5 von [W2] entnommen.

Wir denken uns die quadratische Form F auf Diagonalgestalt gebracht:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2, \ \ a_i \in \mathbb{Q}, \ a_i \neq 0$$

Dann sei

$$V^* = \{x \in V \mid F(x) \neq 0\}, \quad \text{also}$$

$$V_A^* = \{x \in V_A \mid F(x) \in I\}$$

$$V_{\mathfrak{o}_p}^* = \{x \in V_{\mathfrak{o}_p} \mid |F(x)|_p = 1\}$$

$dx_1 \wedge ..... \wedge dx_n$ ist eine Differentialform höchsten Grades und $\neq 0$ auf V^*. Um daraus ein Tamagawa-Maß auf V_A^* abzuleiten, müssen wir zuerst berechnen

$$\int_{V_{\mathfrak{o}_p}^*} dx_1....dx_n = 1 - \int_{|F(x)|<1} dx_1.....dx_n$$

Die Anzahl der isotropen Vektoren mod p ist nach Kapitel 10, wenn alle $|a_i| = 1$ sind,

$$(1) \qquad = \begin{cases} p^{n-1} - 1 & \text{wenn } n \text{ ungerade} \\ (p^{\frac{n}{2}-1} + \eta)(p^{\frac{n}{2}} - \eta) & \text{wenn } n \text{ gerade} \end{cases}$$

wobei $p \neq 2$ und

$$\eta = \left(\frac{(-1)^{\frac{n}{2}} \det V}{p}\right)$$

Beachte, daß in dem Integral über $\{|F(x)| < 1\}$ alle Vektoren x mit $F(x) \equiv 0 \bmod p$ mitzuzählen sind, also auch $x \equiv 0$, der bei den isotropen Vektoren nicht mitgezählt war. Dann folgt aus (1)

$$(2) \qquad \int_{V_{\mathfrak{o}_p}^*} dx_1....dx_n = \begin{cases} 1 - p^{-1} & \text{wenn } n \text{ ungerade} \\ (1 - p^{-1})(1 - \eta p^{-\frac{n}{2}}) & \text{wenn } n \text{ gerade} \end{cases}$$

Dies zeigt: $\lambda_p := (1 - p^{-1})^{-1}$ ist ein System von Konvergenzfaktoren. Wir bezeichnen $d'x$ das von der Differentialform $dx_1 \wedge ..... \wedge dx_n$ und den Konvergenzfaktoren λ_p abgeleitete Tamagawa-Maß.

Satz 25. *Für jede Standardfunktion Φ auf V_A und $n \geq 3$, $Re\ s > 0$ existiert das Integral*

$$\int_{V_A^*} |F(x)|^s \Phi(x)\, d'x$$

(Nach Definition von V_A^* ist $F(x)$ ein Idel , $|F(x)|^s$ ist also wohldefiniert)

Beweis: Nach Definition ist das Integral gleich

$$\lim_S \prod_{v \in S} \int_{V_v^*} |F(x)|_v^s \Phi_v(x) d'x_v \ \cdot \ \prod_{p \notin S} \int_{V_{\mathfrak{o}_p}^*} |F(x)|_p^s \Phi_p(x)\, d'x_p$$

Zu zeigen ist

1. Alle Integrale existieren
2. Das $\prod_{p\notin S}$ konvergiert
3. Der $\lim_S$ existiert

1. ist klar
2. Nach Definition ist $|F(x)|_p = 1$ auf $V_{\mathfrak{o}_p}^*$, und für genügend große S ist Φ_p die Indikatorfunktion von $V_{\mathfrak{o}_p}$. Daher sind im $\prod_{p\notin S}$ alle Integranden gleich 1, wenn S groß genug ist. Nach (2) konvergiert das Produkt absolut, wenn $n \geq 3$.
3. S_0 enthalte alle Primteiler von $2\det F$ sowie ∞ und alle p, für die Φ_p nicht die Indikatorfunktion von $M_p := V_{\mathfrak{o}_p}$ ist. Für alle $p \notin S_0$ ist

$$\int_{V_p^*} |F(x)|^s \Phi_p(x) d'x_p = \int_{M_p} |F(x)|^s d'x_p$$

Wir setzen $x = p^\mu z$ mit primitivem $z \in M_p$. Die Menge der primitiven Vektoren von M_p sei M_p^*. Dann ist

$$\int_{M_p} |F(x)|^s d'x_p = \sum_{\mu=0}^{\infty} p^{-2\mu s} \int_{z\in M_p^*} |F(z)|^s p^{-\mu n} d'z_p$$

$$= \sum_{\mu=0}^{\infty} p^{-\mu(2s+n)} \int_{M_p^*} |F(z)|_p^s d'z_p$$

Das letzte Integral ist

$$\int_{M_p^*} |F(z)|^s d'z_p = \sum_{\nu=0}^{\infty} p^{-\nu s} \int_{|F(z)|=p^{-\nu}} d'z_p = \sum_{\nu=0}^{\infty} p^{-\nu s} [\int_{|F(z)|\leq p^{-\nu}} - \int_{|F(z)|\leq p^{-\nu-1}}]$$

Sei N_ν die Anzahl der mod p^ν verschiedenen $z \in M_p^*$ mit $F(z) \equiv 0 \bmod p^\nu$.
Behauptung: Für $\nu \geq 1$ ist $N_{\nu+1} = p^{n-1} N_\nu$.
Beweis: Sei $\nu \geq 1$ und $F(z) \equiv 0 \bmod p^\nu$. Dann ist $F(z + p^\nu u) \equiv F(z) + 2p^\nu(z,u) \bmod p^{\nu+1}$. Da z primitiv, gibt es zu jedem $\beta \in \mathfrak{o}_p$ genau p^{n-1} mod p verschiedene u mit $(z,u) \equiv \beta \bmod p$. Da $p \neq 2$, gibt es also zu $z \in M_p^*$ mit $F(z) \equiv 0 \bmod p^\nu$ genau p^{n-1} mod $p^{\nu+1}$ verschiedene $z + p^\nu u$ mit $F(z + p^\nu u) \equiv 0 \bmod p^{\nu+1}$. Daher

$$N_{\nu+1} = p^{n-1} N_\nu \text{ und schrittweise } N_\nu = p^{(n-1)(\nu-1)} N_1$$

Bei den Summanden mit $\nu \geq 1$ erhält man

$$p^{-\nu s}[N_\nu p^{-\nu n} - N_{\nu+1} p^{-(\nu+1)n}] = p^{-\nu s}[p^{(n-1)(\nu-1)-\nu n} - p^{(n-1)\nu-(\nu+1)n}] N_1$$

$$= (p-1) p^{-\nu(s+1)} \cdot p^{-n} N_1$$

Für $\nu = 0$ ist

$$\int_{M_p^*} dz_p - \int_{z\in M_p^*, |F(z)|<1} dz_p = 1 - p^{-n} - N_1 p^{-n}$$

Summiert man über ν, so erhält man

$$1-p^{-n}-N_1p^{-n}+N_1p^{-n}(p-1)\frac{p^{-s-1}}{1-p^{-s-1}}=1-p^{-n}+N_1p^{-n}\frac{p^{-s}-1}{1-p^{-s-1}}$$

N_1 ist die Anzahl der isotropen Vektoren mod p. Setzt man die dafür in (1) angegebenen Werte ein, berücksichtigt die Konvergenzfaktoren λ_p und multipliziert noch mit der Summe

$$\sum_{\mu\geq 0} p^{-\mu(2s+n)}=\frac{1}{1-p^{-2s-n}}$$

so erhält man: Für fast alle p ist

$$\int_{V_p^*}|F(x)|^s\Phi_p(x)d'x_p=\begin{cases}\frac{1-p^{-n-s}}{(1-p^{-s-1})(1-p^{-2s-n})} & \text{wenn } n \text{ ungerade}\\ \frac{1-\eta p^{-\frac{n}{2}}}{(1-p^{-s-1})(1-\eta p^{-s-\frac{n}{2}})} & \text{wenn } n \text{ gerade}\end{cases}$$

Das beweist Satz 25, denn das Produkt $\prod_p$ dieser Faktoren konvergiert absolut für $Re\, s>0$ und $n\geq 3$.

Definition:

$$Z(s,\Phi)=\int_{V_A^*}|F(x)|^s\Phi(x)d'x$$

Die Formeln aus dem Beweis von Satz 25 erlauben es, das Residuum von $Z(s,\Phi)$ an der Stelle $s=0$ auszurechnen: Ist S so groß, daß $p\dagger 2\det F$ und Φ_p die Indikatorfunktion von M_p ist für $p\notin S$, dann ist für ungerades n

$$Z(s,\Phi)=\prod_{v\in S}\int_{V_v^*}|F(x)|_v^s\Phi_v(x)d'x_v \quad\cdot\quad \prod_{p\notin S}\frac{1-p^{-s-n}}{(1-p^{-s-1})(1-p^{-2s-n})}=$$

$$Z_\infty\cdot\prod_{p\in S}\frac{\int_{V_p^*}|F(x)|_p^s\Phi_p(x)d'x_p}{(1-p^{-s-n})(1-p^{-s-1})^{-1}(1-p^{-2s-n})^{-1}}\quad\cdot\quad\frac{\zeta(s+1)\zeta(2s+n)}{\zeta(s+n)}$$

mit $Z_\infty=\int_{V_\infty}|F(x)|_\infty^s\Phi_\infty(x)d'x_\infty$ Das erste Produkt hat nur endlich viele Fakoren und ist damit eine stetige Funktion von s in $Re\, s\geq 0$. Sein Grenzwert für $s\to 0$ ist eingedenk von $d'x_p=(1-p^{-1})^{-1}dx_p$ gleich $\prod_{p\in S}\int_{V_p}\Phi_p(x)dx_p$ (die Menge $V_p\setminus V_p^*$ trägt zum Integral nichts bei). Dadurch wird, weil die Riemannsche Zetafunktion an der Stelle 1 das Residuum 1 hat,

$$\lim_{s\to 0} sZ(s,\Phi)=\prod_{v\in S}\int_{V_v}\Phi_v(x)dx_v$$

Für $p\notin S$ ist nun aber $\Phi_p=\mathbf{1}_{M_p}$ und damit $\int_{V_p}\Phi_p(x)dx_p=1$. Diese Faktoren können wir also dem Produkt einfach hinzufügen und erhalten

(3) $$\lim_{s\to 0} sZ(s,\Phi)=\int_{V_A}\Phi(x)dx_A=\hat{\Phi}(0)$$

Für gerades n stellen wir dieselbe Überlegung an und erhalten in dem Produkt $\prod_{p\notin S}$ die Eulerfaktoren von $\frac{\zeta(s+1)L(s+\frac{n}{2},\eta)}{L(\frac{n}{2},\eta)}$, wobei $L(s,\eta)$ die L-Reihe zum Dirichletcharakter $\eta=(\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}\det F}{p})$ ist. Man findet wieder die Formel (3) für das Residuum.

Verfeinerung dieser Zetafunktion: Sei S eine endliche Menge von Primstellen, welche 2 und ∞ enthält. Man setzt

$$H_S = I^2 \cdot \prod_{p\notin S} \mathfrak{o}_p^* = \{x \in I \mid x_v \in \mathbb{Q}_v^{*2} \text{ für } v \in S \text{ und } v_p(x_p) \text{ gerade für } p \notin S\}$$

H_S ist eine Untergruppe von I.

Lemma 1. $(I : H_S\mathbb{Q}^*) = 2^{|S|}$

Beweis: Wir erinnern daran, daß I eine direkte Zerlegung besitzt:

$$I = \mathbb{Q}^* \cdot (\mathbb{R}_{>0}^* \times \prod_{p\in S(p\neq\infty)} \mathfrak{o}_p^* \times \prod_{p\notin S} \mathfrak{o}_p^*)$$

($\mathbb{Q}^*$ und die Klammer treffen sich nur in 1). Und darin ist

$$H_S\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q}^* \cdot (\mathbb{R}^{*2} \times \prod_{p\in S(p\neq\infty)} \mathfrak{o}_p^{*2} \times \prod_{p\notin S} \mathfrak{o}_p^*)$$

Das zeigt

$$I/H_S\mathbb{Q}^* \simeq \prod_{p\in S(p\neq\infty)} \mathfrak{o}_p^*/\mathfrak{o}_p^{*2}$$

Da die Quadrate in der Einheitengruppe eine Untergruppe vom Index 2 bilden, falls $p\neq 2$, und vom Index 4, wenn $p=2$, und da $2\in S$ und $\infty\in S$, hat diese Gruppe gerade die Ordnung $2^{|S|}$.

Lemma 2. *Sei λ ein Charakter von I, der auf $H_S\mathbb{Q}^*$ gleich 1 ist. Dann gehört zu λ ein Dirichlet Charakter χ auf $\mathbb{Z}$. Wenn $\lambda\neq 1$, dann ist auch $\chi\neq 1$.*

Beweis: Sei ι_v die Einbettung

$$x \mapsto (1,\ldots.,1,x,1,\ldots...)$$

von $\mathbb{Q}_v^*$ in I und $\lambda_v = \lambda\circ\iota_v$. Für ein festes Idel $x=(x_v)_v$ ist dann $\lambda_p(x_p)=1$ für fast alle p und $\lambda(x)=\prod_v \lambda_v(x_v)$.
Für $p\notin S$ ist $\lambda_p(\mathfrak{o}_p^*)=1$, das heißt, für $x\in\mathbb{Q}_p^*$ hängt $\lambda_p(x)$ nur von $|x|_p$ ab:

$$\lambda_p(x) = |x|_p^{it_p}$$

Nebenbei bemerkt sind alle diese Werte gleich ±1, weil $\lambda(I^2)=1$. Wir setzen $p^{it_p}=\epsilon_p$.
Wenn $\lambda_\infty = 1$, dann setzen wir

$$m = m_0 = \begin{cases} \prod_{p\in S} p & \text{wenn } \lambda_2(\mathfrak{o}_2^*) = 1 \\ 4\prod_{p\in S} p & \text{wenn } \lambda_2(\mathfrak{o}_2^*) \neq 1 \end{cases}$$

Wenn $\lambda_\infty \neq 1$, dann setzen wir

$$m = \infty \cdot m_0$$

Nach Konvention bedeutet dann für $a, b \in \mathbb{Z}$

$$ggT(a, m) = 1, \text{ daß } ggT(a, m_0) = 1 \text{ und } a > 0 \text{ wenn } m = \infty \cdot m_0$$

und

$$a \equiv b \bmod m, \text{ daß } a \equiv b \bmod m_0 \text{ und } ab > 0 \text{ wenn } m = \infty \cdot m_0$$

Man definiert den Charakter χ für zu m teilerfremde $a \in \mathbb{Z}$ durch

$$\chi(a) = \prod_{v \in S} \lambda_v(a)$$

Dann gilt

1. Für Primzahlen $p \notin S$ (das heißt $p \dagger m$)

$$\chi(p) = \prod_{v \in S} \lambda_v(p) = \lambda(p) \cdot \lambda_p(p)^{-1} = \epsilon_p$$

weil $\lambda(\mathbb{Q}^*) = 1$ und $\lambda_q(p) = 1$ für $q \notin S,\ q \neq p$.

2. $\chi(ab) = \chi(a)\chi(b)$, weil dasselbe für λ und alle λ_v gilt.

3. Seien a, b teilerfremd zu m und $a \equiv b \bmod m$. Wenn $\infty | m$, dann bedeutet das $ab > 0$, also $\lambda_\infty(a) = \lambda_\infty(b)$. Sei r eine Primzahl in S. Aus $a \equiv b \bmod r$ (bzw. mod $4r$, wenn $r = 2$) folgt, daß a und b zur selben Quadratklasse in $\mathfrak{o}_r^*$ gehören. Dann ist $\lambda_r(a) = \lambda_r(b)$. Das zeigt

$$a \equiv b \bmod m \Rightarrow \chi(a) = \chi(b)$$

Damit ist bewiesen, daß χ ein Dirichlet Charakter mod m ist. (m ist nicht notwendig der kleinste Erklärungsmodul, aber das schadet nicht.)

Nun betrachten wir zu jedem Charakter λ von I mit $\lambda(H_S\mathbb{Q}^*) = 1$

$$Z(s, \Phi, \lambda) := \int_{V_A^*} |F(x)|^s \lambda(x) \Phi(x) d'x$$

(Das Integral existiert (für $Re\, s > 0$); man hat ja nur die integrierbare Funktion $|F(x)|^s \Phi(x)$ mit einer stetigen Funktion vom Betrag 1 multipliziert). Die lokalen Faktoren für $p \notin S$ sind

$$Z_p(s, \Phi, \lambda) = \int_{V_p^*} |F(x)|_p^s \lambda_p(F(x)) \Phi_p(x) d'x_p = \int_{V_p^*} |F(x)|^{s+it_p} \Phi_p(x) d'x_p$$

Wir brauchen in den alten Formeln für die lokalen Integrale nur s durch $s + it_p$ zu ersetzen und erhalten für $p \notin S$ und ungerade n

$$Z_p(s, \Phi, \lambda) = \frac{1 - p^{-n-s-it_p}}{(1 - p^{-s-it_p-1})(1 - p^{-2(s+it_p)-n})} = \frac{1 - \epsilon_p p^{-n-s}}{(1 - \epsilon_p p^{-s-1})(1 - p^{-2s-n})}$$

Dies sind die Eulerfaktoren zu

$$\frac{L(s+1,\chi)\zeta(2s+n)}{L(s+n,\chi)}$$

Für gerades n erhält man unter Benutzung der alten Formeln

$$Z_p(s,\Phi,\lambda) = \frac{1-\eta p^{-\frac{n}{2}}}{(1-\epsilon_p p^{-s-1})(1-\epsilon_p p^{-s-\frac{n}{2}})}$$

Das sind die Eulerfaktoren von

$$\frac{L(s+1,\chi)L(s+\frac{n}{2},\chi)}{L(\frac{n}{2},\eta)}$$

Da die L-Funktionen zu Charakteren $\neq 1$ an der Stelle 1 holomorph sind, liefern die $Z(s,\Phi,\lambda)$ mit $\lambda \neq 1$ keinen Beitrag zum Residuum an der Stelle 0, und daher ist, wenn man über alle Charaktere λ summiert, die auf $H_S\mathbb{Q}^*$ gleich 1 sind,

$$res_{s=0}\sum_\lambda Z(s,\Phi,\lambda) = \hat{\Phi}(0)$$

Nach den bekannten Charakterrelationen und der Berechnung des Index $(I : H_S\mathbb{Q}^*)$ in Lemma 1 ist

$$\sum_\lambda \lambda(x) = \begin{cases} 2^{|S|} & \text{wenn } x \in H_S\mathbb{Q}^* \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Also ist

$$\sum_\lambda Z(s,\Phi,\lambda) = 2^{|S|}\int_{F(x)\in H_S\mathbb{Q}^*} |F(x)|^s\Phi(x)d'x$$

$H_S\mathbb{Q}^*$ ist die Vereinigung aller $H_S\rho$ mit $\rho\in\mathbb{Q}^*$, und weil $H_S\cap\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q}^{*2}$, erhält man eine disjunkte Vereinigung, wenn man $\rho \bmod \mathbb{Q}^{*2}$ laufen läßt, und

$$\int_{F(x)\in H_S\mathbb{Q}^*} \quad = \sum_{\rho\in\mathbb{Q}^*/\mathbb{Q}^{*2}}\int_{F(x)\in H_S\rho}$$

.

Das Ergebnis ist

Satz 26. *Die Funktion*

$$Z_S(s) = \sum_{\rho\in\mathbb{Q}^*/\mathbb{Q}^{*2}}\int_{F(x)\in H_S\rho} |F(x)|^s\Phi(x)d'x$$

ist holomorph für $Re\, s > 0$ *und hat an der Stelle* $s=0$ *das Residuum* $2^{-|S|}\hat{\Phi}(0)$.

Jetzt wird die Gruppe G_A ins Spiel gebracht: Die Gruppe $G\times GL(1)$ operiert auf V vermöge $x\mapsto Xxt$, $(X\in G,\, t\in GL(1))$. Wir sahen bereits, daß $\{1\}$ Konvergenzfaktoren für G_A sind, und $\{\lambda_\infty = 1,\ \lambda_p = (1-\frac{1}{p})^{-1}\}$ für die Idelgruppe I. Wir bezeichnen mit ω_A das Tamagawa-Maß von G_A und setzen $\prod_v \lambda_v(\frac{dt}{t})_v = d^*t$. Dann ist $\omega_A d^*t$ ein rechts- und linksinvariantes Maß auf $G_A \times I$. Sei $e \in V_{\mathbb{Q}}$ fest und $F(e) = \rho \neq 0$. Der Stabilisator g von e in G ist die spezielle orthogonale Gruppe von $e^{\perp}$, sein Tamagawa-Maß $\bar{\omega}_A$ ist ebenfalls rechts und links invariant. Deshalb können wir wie in Kapitel 7 auf dem homogenen Raum G_A/g_A integrieren. Dieser ist vermöge $x \leftrightarrow Xe$ die Sphäre $\Sigma_A = \{x \in V_A \mid F(x) = \rho\}$ (siehe Kapitel 4). Auf der Sphäre Σ ist nach Lemma 1, Seite 121 für alle i, j

$$(-1)^i \frac{dx_1 \wedge .... \cancel{i} ... \wedge dx_n}{a_i x_i} = (-1)^j \frac{dx_1 \wedge .... \cancel{j} .... \wedge dx_n}{a_j x_j} =: \psi$$

eine G -invariante Differentialform, und die Sphäre hat Konvergenzfaktoren $\{1\}$. Sei ψ_A das davon abgeleitete Maß auf Σ_A . Die Differentialform ψ ist bis auf einen rationalen Faktor bestimmt, und daher ist wegen der Produktformel $\omega_A = \bar{\omega}_A \psi_A$. In dem Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & G_A \times I \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
G_{\mathbb{Q}} \times \mathbb{Q}^* \arrow[dr, dash] & & g_A \times \{1\} \arrow[dl, dash] \\
 & g_{\mathbb{Q}} \times \{1\} &
\end{tikzcd}$$

integrieren wir einmal links herum und einmal rechts herum.

Rechts:

$$\int_{G_A \times I / g_{\mathbb{Q}} \times \{1\}} |t|^{2s+n} \Phi(Xet) \omega_A(X) d^*t = \int_{\Sigma_A \times I} |t|^{2s+n} \int_{g_A/g_{\mathbb{Q}}} \Phi(XYet) \bar{\omega}_A(Y) \psi_A(Xe) d^*t$$

$\Phi(XYet) = \Phi(Xet)$ hängt von $Y \in g_A$ gar nicht ab, und nach Induktionsannahme (die wir ab Dimension 3 benutzen können, wir müssen also in unserer Rechnung $n \geq 4$ annehmen) ist $\int_{g_A/g_{\mathbb{Q}}} \bar{\omega}_A = 2$. Also erhält man

$$2 \cdot \int_{\Sigma_A \times I} |t|^{2s+n} \Phi(xt) \psi_A(x) d^*t$$

Links:

Das gesamte Integral ist

$$\int_{G_A/G_{\mathbb{Q}} \times I/\mathbb{Q}^*} \sum_{\sigma \in G_{\mathbb{Q}}, \sigma \bmod g_{\mathbb{Q}}, \tau \in \mathbb{Q}^*} |t\tau|^{2s+n} \Phi(X\sigma e t \tau) \omega_A(X) d^*t$$

Wegen der Produktformel ist $|\tau| = 1$. Läuft nun σ durch $G_{\mathbb{Q}}$ modulo $g_{\mathbb{Q}}$ und τ durch $\mathbb{Q}^*$, so läuft $\sigma e \tau$ zweimal durch die Vektoren $\xi \in V_{\mathbb{Q}}$ mit $F(\xi) \in \mathbb{Q}^{*2}\rho$ (für jedes ξ mit $F(\xi) \neq 0$ gibt es $\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$ mit $\sigma\xi = -\xi \in \mathbb{Q}^*\xi$) . Daher ist die innere Summe

$$= 2 \sum_{\xi \in V_{\mathbb{Q}}, F(\xi) \in \mathbb{Q}^{*2}\rho} \Phi(X\xi t)$$

Durch Vergleich der beiden Integrationswege erhalten wir

$$(4)\quad \int_{G_A/G_{\mathbb{Q}}\times I/\mathbb{Q}^*} |t|^{2s+n} \sum_{\xi\in V_{\mathbb{Q}},F(\xi)\in\mathbb{Q}^{*2}\rho} \Phi(X\xi t)\omega_A(X)d^*t = \int_{\Sigma_A\times I} |t|^{2s+n}\Phi(xt)\psi_A(x)d^*t$$

Im nächsten Abschnitt berechnen wir die lokalen Faktoren des rechten Integrals, was gleichzeitig die Existenz der obigen Integrale beweist.

Die lokalen Faktoren sind die Integrale

$$\int_{\Sigma_p\times\mathbb{Q}_p^*} |t|_p^{2s+n}\Phi_p(tx)\psi_p(x)d^*t_p$$

Wir rechnen sie aus für die p, die nicht in $2\det F$ aufgehen und für die Φ_p die Indikatorfunktion von M_p ist:

$(x,t)\mapsto(tx,t)$ ist eine Bijektion von $\Sigma_p\times\mathbb{Q}_p^* = \{(x,t)\mid F(x)=\rho,\ t\in\mathbb{Q}_p^*\}$ auf $\{(y,t)\mid F(y)=t^2\rho,\ t\in\mathbb{Q}_p^*\}$. Dabei ist $\psi_p(y)d^*t_p = |t|_p^{n-2}\psi_p(x)d^*t_p$. Also ist das Integral $=: I_p =$

$$\int_{y\in M_p,t\in\mathbb{Q}_p^*,F(y)=\rho t^2} |t|_p^{2s+2}\psi_p(y)d^*t_p$$

Wir setzen $y=p^\lambda z$ mit primitivem z in M_p und $t=p^\mu r$ mit $|r|=1$. Dann ist $d^*t_p=d^*r_p$. Sei $\rho=p^\alpha u$ mit $|u|=1$.

$$F(y)=\rho t^2 \Longleftrightarrow F(z)=p^{-2\lambda}p^\alpha u p^{2\mu}r^2$$

Wegen $F(z)\in\mathfrak{o}_p$ ist $\alpha+2\mu-2\lambda\geq 0$, und es ist $\psi_p(y)=p^{-\lambda(n-2)}\psi_p(z)$. Damit spaltet sich des Integral I_p auf in die Summe

$$I_p=\sum_{0\leq 2\lambda\leq\alpha+2\mu} p^{-\mu(2s+2)}p^{-\lambda(n-2)}\int_{z\in M_p^*,F(z)=p^{\alpha+2\mu-2\lambda}ur^2}\psi_p(z)d^*r_p$$

In dem Integral über z und r kann man z durch $\frac{1}{r}z$ ersetzen, ohne daß sich $\psi_p(z)$ ändert. Danach hängt das Integral über z gar nicht mehr von r ab, und das Integral über r ist gleich 1. So wird schließlich

$$I_p=\sum_{0\leq 2\lambda\leq\alpha+2\mu} p^{-\mu(2s+2)}p^{-\lambda(n-2)}\int_{z\in M_p^*,F(z)=p^{\alpha+2\mu-2\lambda}u}\psi_p(z)$$

Das Integral ist $=p^{-(n-1)}$ mal Anzahl N der mod p verschiedenen $z\in M_p^*$ mit $F(z)\equiv p^{\alpha+2\mu-2\lambda}u \bmod p$, nämlich:

Für $c\in\mathfrak{o}_p$ gilt

$$\int_{z\in M_p^*,F(z)=c}\psi_p(z)=\sum_{b\in M_p^*,\,F(b)=c,\,b \bmod p}\int_{z\equiv b \bmod p,F(z)=c}\psi_p(z)$$

Für $b \in M_p^*$ ist mindestens eine Koordinate Einheit, etwa b_1. Für $z \equiv b \bmod p$ ist dann auch $|z_1|_p = 1$ und $\psi_p(z) = (dz_2....dz_n)_p$. Schreibt man $z = b + py$ mit $y \in M_p$, so ist

$$F(z) = c \Leftrightarrow 2p(b,y) + p^2F(y) = 0 \Leftrightarrow 2a_1b_1y_1 + pa_1y_1^2 = -2\sum_{i=2}^{n} a_ib_iy_i - p\sum_{i=2}^{n} a_iy_i^2 =: a_1d$$

Diese Gleichung hat zu vorgegebenen $y_2, ..., y_n \in \mathfrak{o}_p$ genau eine Lösung $y_1 \in \mathfrak{o}_p$; denn für

$$f(y_1) := 2b_1y_1 + py_1^2 - d$$

gilt

$$f(\frac{d}{2b_1}) \equiv 0 \bmod p$$

und

$$f'(\frac{d}{2b_1}) \not\equiv 0 \bmod p$$

Nach Hensel gibt es eine Lösung $y_1 \equiv \frac{d}{2b_1}$, also in $\mathfrak{o}_p$. Die Summe der beiden Nullstellen von f ist $= -\frac{2b_1}{p} \notin \mathfrak{o}_p$, also ist die andere Nullstelle nicht in $\mathfrak{o}_p$. Daher kann man auf $\{z \equiv b \bmod p, F(z) = c\}$ die Koordinaten $y_2, ..., y_n$ als Parameter benutzen. Außerdem kann man jede Restklasse $b \bmod p$ mit $b \in M_p^*$ und $F(b) \equiv c \bmod p$ durch einen Vektor b mit $F(b) = c$ vertreten. Mit $(dz_2.....dz_n)_p = p^{-(n-1)}(dy_2.....dy_n)_p$ wird

$$\int_{z \in M_p^*, F(z) = p^{\alpha+2\mu-2\lambda}u} \psi_p(z) = \sum_{b \in M_p^*,\, b \bmod p,\, F(b) \equiv p^{\alpha+2\mu-2\lambda}u} p^{-(n-1)} = N \cdot p^{-(n-1)}$$

wie behauptet. Für diese Anzahl N müssen wir vier Fälle unterscheiden. Die angegebenen Werte stammen aus Kapitel 10, Seite 60.

1. $\alpha + 2\mu - 2\lambda = 0$ und n gerade.

$$N = p^{n-1} - \epsilon p^{\frac{n}{2}-1} \text{ mit } \epsilon = (\frac{(-1)^{\frac{n}{2}} \det F}{p})$$

2. $\alpha + 2\mu - 2\lambda = 0$ und n ungerade.

$$N = p^{n-1} + \epsilon' p^{\frac{n-1}{2}} \text{ mit } \epsilon' = (\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}} u \det F}{p})$$

3. $\alpha + 2\mu - 2\lambda > 0$ und n gerade

$$N_0 = (p^{\frac{n}{2}} - \epsilon)(p^{\frac{n}{2}-1} + \epsilon)$$

4. $\alpha + 2\mu - 2\lambda > 0$ und n ungerade

$$N_0 = p^{n-1} - 1$$

Wenn α ungerade ist, dann kommen in der Summe nur Summanden vom Typ 3 oder 4 vor. Die Summe ist dann

$$= \sum_{0\le\lambda\le\frac{\alpha-1}{2}+\mu} p^{-\mu(2s+2)}p^{-\lambda(n-2)} = \frac{p^{(\alpha-1)(s+1)}}{(1-p^{-2s-2})(1-p^{-n-2s})}$$

Wir erhalten

$$(5) \qquad (1-p^{-2s-2})(1-p^{-2s-n})\cdot I_p = p^{(\alpha-1)(s+1)}\cdot(1-p^{-(n-1)})$$

wenn α ungerade und n ungerade

$$(6) \qquad (1-p^{-2s-2})(1-p^{-2s-n})\cdot I_p = p^{(\alpha-1)(s+1)}\cdot(1-\epsilon p^{-\frac{n}{2}})(1+\epsilon p^{-(\frac{n}{2}-1)})$$

wenn α ungerade und n gerade. Ist hingegen α gerade, so gibt es in der Summe den Anfangsterm mit $2\lambda = \alpha + 2\mu$. Die zugehörige Teilsumme ist

$$\sum_{0\le 2\lambda=a+2\mu} p^{-\mu(2s+2)}p^{-\lambda(n-2)} = \frac{p^{\alpha(s+1)}}{1-p^{-2s-n}}$$

Die restliche Teilsumme ist

$$\sum_{0\le 2\lambda<\alpha+2\mu} p^{-\mu(2s+2)}p^{-\lambda(n-2)} = \frac{p^{(\alpha-2)(s+1)}}{(1-p^{-2s-2})(1-p^{-2s-n})}$$

Multipliziert man die erste Summe mit N und die zweite mit N_0 und faßt alles zusammen, so erhält man

$$(7) \qquad (1-p^{-2s-2})(1-p^{-2s-n})\cdot I_p = p^{\alpha(s+1)}(1+\epsilon' p^{-\frac{n-1}{2}})(1-\epsilon' p^{-\frac{n-1}{2}-2s-2})$$

wenn α gerade und n ungerade Wenn n gerade ist, macht man dasselbe und erhält

$$(8) \qquad (1-p^{-2s-2})(1-p^{-2s-n})\cdot I_p = p^{\alpha(s+1)}(1-\epsilon p^{-\frac{n}{2}})(1+\epsilon p^{-\frac{n}{2}-2s-1})$$

wenn α gerade und n gerade

Diese Formeln zeigen zunächst, daß das Produkt über alle p für $Re\ s > 0$ konvergiert (wir haben $n \ge 4$). Damit existiert das rechte Integral in (4). Wir würden nun in Anbetracht von (4) gerne das Ganze noch über $\rho \in \mathbb{Q}^*/\mathbb{Q}^{*2}$ summieren. Um die Konvergenz dieser Summe zu beweisen, vergleichen wir sie gliedweise mit der als konvergent erkannten Summe in Satz 26. Diese war

$$(A) \qquad \sum_{\rho\in\mathbb{Q}^*/\mathbb{Q}^{*2}} \int_{F(x)\in H_S\rho} |F(x)|^s\Phi(x)d'x$$

Und nun wollen wir die Konvergenz von

$$(B) \qquad \sum_{\rho\in\mathbb{Q}^*/\mathbb{Q}^{*2}} \int_{\Sigma(\rho)_A\times I} |t|^{2s+n}\Phi(tx)\psi_A(x)d^*t$$

einsehen. Dabei ist $\Sigma(\rho)$ die Sphäre $F(x)=\rho$.

In den Integralen (B) rechnen wir die Differentialform um: Mit $y=tx$ ist

$$dy_1\wedge....\wedge dy_n=(x_1dt+tdx_1)\wedge.....\wedge(x_ndt+tdx_n)=t^{n-1}\sum_{i=1}^n x_idx_1\wedge...\wedge dt.....\wedge dx_n$$

(weil $dx_1\wedge.....\wedge dx_n=0$ wegen $\sum a_ix_i^2=const$)

$$=t^{n-1}dt\wedge\sum_{i=1}^n(-1)^{i-1}a_ix_i^2\frac{dx_1\wedge....\not{i}...\wedge dx_n}{a_ix_i}=\rho t^{n-1}dt\wedge\psi$$

Sodann schreiben wir die Integrale in (A) und (B) als unendliche Produkte (für genügend große S) hin:

$$(A)\qquad \prod_{v\in S}\int_{F(x)\in\rho\mathbb{Q}_v^{*2}}|F(x)|_v^s\Phi_v(x)d'x_v\ \cdot\ \prod_{p\notin S}\int_{x\in M_p,F(x)\in\rho\mathbb{Q}_p^{*2}\mathfrak{o}_p^*}|F(x)|_p^sd'x_p$$

Läßt man in den Integralen (B) das Paar (x,t) durch $\Sigma(\rho)_v\times\mathbb{Q}_v^*$ laufen, so läuft $y=tx$ genau zweimal durch die Menge $F(y)\in\rho\mathbb{Q}_v^{*2}$. Daher erhalten wir in (B), indem wir $\psi_A(x)d^*t$ durch $|\rho^{-1}t^{-n}|d'y$ ersetzen

$$(B)\ \prod_{v\in S}2\cdot\int_{F(y)\in\rho\mathbb{Q}_v^{*2}}|\rho|_v^{-s-1}|F(y)|_v^s\Phi_v(y)d'y_v\cdot\prod_{p\notin S}2\cdot\int_{y\in M_p,F(y)\in\rho\mathbb{Q}_p^{*2}}|\rho|_p^{-s-1}|F(y)|_p^sd'y_p$$

Die Faktoren $|\rho|_v$ in (B) lassen wir weg, weil ihr Produkt über alle v gleich 1 ist ($\rho\in\mathbb{Q}^*$). Danach unterscheiden sich die Faktoren für $v\in S$ in (A) und (B) um den Fakor 2. Teilt man (A) durch (B), so erhält man also $2^{-|S|}$ mal den Quotienten für $p\notin S$. Diese Quotienten sind

$$\{\int_{x\in M_p,F(x)\in\rho\mathbb{Q}_p^{*2}\mathfrak{o}_p^*}|F(x)|_p^sd'x_p\}\cdot\{2\int_{x\in M_p,F(x)\in\rho\mathbb{Q}_p^{*2}}|F(x)|_p^sd'x_p\}^{-1}$$

Für $p\notin S$ ist $\mathfrak{o}_p^*$ Vereinigung von zwei Quadratklassen (weil $2\in S$). Ist δ eine Einheit in $\mathfrak{o}_p$, die nicht Quadrat ist, so ist der Zähler in diesem Ausdruck gleich der Summe der über $F(x)\in\rho\mathbb{Q}_p^{*2}$ und $F(x)\in\rho\delta\mathbb{Q}_p^{*2}$ erstreckten Integrale. Ist n gerade, so sind nach den Formeln (5) bis (8) diese beiden Integrale gleich, und der Beitrag der Stelle p zum Quotienten $\frac{A}{B}$ ist gleich 1. Ist jedoch n ungerade (und $\alpha=0$, was für fast alle p der Fall ist), dann liefert p nach den Formeln (5) bis (8) zum Quotienten $\frac{A}{B}$ den Beitrag

$$\frac{(1-\epsilon'p^{-\frac{n-1}{2}})(1+\epsilon'p^{-\frac{n-1}{2}-2s-2})+(1+\epsilon'p^{-\frac{n-1}{2}})(1-\epsilon'p^{-\frac{n-1}{2}-2s-2})}{2(1+\epsilon'p^{-\frac{n-1}{2}})(1-\epsilon'p^{-\frac{n-1}{2}-2s-2})}$$

$$=\frac{1-p^{-n-1-2s}}{(1+\epsilon'p^{-\frac{n-1}{2}})(1-\epsilon'p^{-\frac{n-1}{2}-2s-2})}=:\Theta(p)^{-1}$$

mit $\epsilon'=\pm1$. Für reelle $a>b>0$ gilt $1-p^{-b}<1-p^{-a}<1+p^{-a}<1+p^{-b}$, und indem man $\epsilon'=1$ und $\epsilon'=-1$ getrennt diskutiert, findet man, daß für reelle $s>0$ in beiden Fällen

$$1-p^{-\frac{n-1}{2}}<\Theta(p)<1+p^{-\frac{n-1}{2}}$$

Man setzt $\lambda(S)=\prod_{p\notin S}(1-p^{-\frac{n-1}{2}})$ und $\mu(S)=\prod_{p\notin S}(1+p^{-\frac{n-1}{2}})$. Da $n\geq 4$ und hier aber ungerade, ist $\frac{n-1}{2}\geq 2$, und diese Produkte konvergieren. Aus $\frac{B}{A}=2^{|S|}\prod_p\Theta(p)$ erhält man

$$0<2^{|S|}\lambda(S)\leq\frac{B}{A}\leq 2^{|S|}\mu(S)$$

Rufen wir die Abhängigkeit von ρ in Erinnerung: $A=A(\rho)$, $B=B(\rho)$. Für reelle $s>0$ und alle $\rho\in\mathbb{Q}^*$ haben wir

$$0<\lambda(S)2^{|S|}A(\rho)\leq B(\rho)\leq\mu(S)2^{|S|}A(\rho)$$

Aus der absoluten Konvergenz von $\sum_\rho A(\rho)$ folgt hiermit die absolute Konvergenz von $\sum_\rho B(\rho)$ für reelle $s>0$ und damit in der Halbebene $Re\ s>0$. Damit ist auch $\sum_\rho B(\rho)$ eine dort holomorphe Funktion. Da $\sum_\rho A(\rho)$ an der Stelle $s=0$ das Residuum $2^{-|S|}\hat{\Phi}(0)$ hat, liegt das Residuum von $\sum_\rho B(\rho)$ zwischen $\lambda(S)\hat{\Phi}(0)$ und $\mu(S)\hat{\Phi}(0)$. Wenn man S groß genug nimmt, dann liegen $\lambda(S)$ und $\mu(S)$ beliebig nahe an 1. Es folgt

Satz 27.

$$\sum_{\rho\in\mathbb{Q}^*/\mathbb{Q}^{*2}}\int_{\Sigma(\rho)_A\times I}|t|^{2s+n}\Phi(xt)\psi_A(x)d^*t$$

und damit nach (4) die Summe

$$\sum_{\rho\in\mathbb{Q}^*/\mathbb{Q}^{*2}}\int_{G_A/G_\mathbb{Q}\times I/\mathbb{Q}^*}|t|^{2s+n}\sum_{F(\xi)\in\rho\mathbb{Q}^{*2}}\Phi(X\xi t)\omega_A(X)d^*t$$

ist eine holomorphe Funktion von s in $Re\ s>0$, und ihr Residuum an der Stelle $s=0$ ist $\hat{\Phi}(0)$.

In Satz 27 wollen wir Summe und Integral vertauschen: Durch Zerlegung in Positiv- und Negativteil können wir annehmen, daß $\Phi\geq 0$. Nach den obigen Betrachtungen existieren

$$H_\rho(X,t)=\sum_{\xi\in V_\mathbb{Q},F(\xi)\in\rho\mathbb{Q}^{*2}}|t|^{2s+n}\Phi(X\xi t)$$

$$\int_{G_A/G_\mathbb{Q}\times I/\mathbb{Q}^*}H_\rho(X,t)\omega_A(X)d^*t=:J_\rho$$

und

$$\sum_{\rho\in\mathbb{Q}^*/\mathbb{Q}^{*2}}J_\rho$$

Aus den definierenden Eigenschaften der Standardfunktion Φ folgt, daß

$$K(X,t):=\sum_{\rho\in\mathbb{Q}^*/\mathbb{Q}^{*2}}H_\rho(X,t)$$

auf jedem Kompaktum $C\subset G_A/G_\mathbb{Q}\times I/\mathbb{Q}^*$ absolut und gleichmäßig konvergiert. Also ist

$$\int_C K(X,t)\omega_A(X)d^*t=\sum_\rho\int_C H_\rho(X,t)\leq\sum_\rho\int H_\rho=\sum_\rho J_\rho<\infty$$

Also existiert das Supremum über C der linken Seite, und dieses ist nach Definition das $\int K(X,t)$.

Nun vertauschen wir in Satz 27 Summe und Integral. Dann entsteht unter dem Integral die Summe

$$\sum_{\xi \in V_{\mathbb{Q}}, \xi \neq 0} \Phi(X\xi t), \text{ und wir erhalten}$$

Satz 28 .

$$\tilde{Z}(s,\Phi) := \int_{G_A/G_{\mathbb{Q}} \times I/\mathbb{Q}^*} |t|^{2s+n} \sum_{\xi \in V_{\mathbb{Q}}, F(\xi) \neq 0} \Phi(X\xi t)\omega_A(X)d^*t$$

ist eine holomorphe Funktion von s *in* $Re\ s > 0$, *und ihr Residuum an der Stelle* $s = 0$ *ist* $\hat{\Phi}(0)$.

Analytische Fortsetzung: Für $t \in (0,\infty)$ setzt man

$$f^+(t) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } t > 1 \\ 0 & \text{wenn } t < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{wenn } t = 1 \end{cases}$$

und $f^-(t) = f(\frac{1}{t}) = 1 - f^+(t)$. Dann zerlegt man $\tilde{Z}(s,\Phi) = Z^+(s,\Phi) + Z^-(s,\Phi)$ mit

$$Z^+(s,\Phi) = \int_{G_A/G_{\mathbb{Q}} \times I/\mathbb{Q}^*} f^+(|t|)|t|^{2s+n} \sum_{F(\xi)\neq 0} \Phi(X\xi t)\ \omega_A(X)d^*t$$

und Z^- entsprechend mit f^- statt f^+ . Das ursprüngliche Integral $\tilde{Z}$ war konvergent für $Re\ s > 0$, also ist auch Z^+ für $Re\ s > 0$ konvergent. Nun konvergiert aber das Integral Z^+ umso besser. je kleiner $Re\, s$ ist. Es liefert die holomorphe Fortsetzung von Z^+ auf die ganze s-Ebene.

Das Integral $Z^-(s,\Phi)$ formen wir um : Wir benutzen jetzt, daß F anisotrop ist. Dann ist

$$\sum_{F(\xi)\neq 0} \Phi(X\xi t) = -\Phi(0) + \sum_{\xi \in V_{\mathbb{Q}}} \Phi(X\xi t)$$

Auf die Summe wenden wir die Poisson'sche Summenformel an. Zur Identifizierung von V_A mit seiner Charaktergruppe benutzen wir die gegebene quadratische Form auf V , für $x, y \in V_A$ ist also

$$< x, y >= \chi((x,y)) = \chi(x'Cy)$$

wenn C die Gram-Matrix der quadratischen Form F ist ($F(x) = x'Cx$). Für $X \in G$ ist dann

$< Xx, y >=< x, X^{-1}y >$, und die Fouriertransformierte von $\Psi(x) := \Phi(Xxt)$ ist

$$\hat{\Psi}(y) = \int_{V_A} \Phi(Xxt) < x, y > dx = |t|^{-n} \int_{V_A} \Phi(z) < X^{-1}zt^{-1}, y > dz (\text{ weil } \det X = 1)$$

$$= |t|^{-n} \int_{V_A} \Phi(z) < z, Xyt^{-1} > dz = |t|^{-n}\hat{\Phi}(Xyt^{-1})$$

Dies setzen wir in Z^- ein:

$$Z^-(s,\Phi) =$$

$$\int_{G_A/G_{\mathbb{Q}}\times I/\mathbb{Q}^*} f^-(|t|)|t|^{2s+n}\{-\Phi(0)+|t|^{-n}\hat\Phi(0)+|t|^{-n}\sum_{\eta\neq 0}\hat\Phi(X\eta t^{-1})\}\ \omega_A(X)d^*t$$

Für den ersten Summanden finden wir

$$-\Phi(0)\int_{G_A/G_{\mathbb{Q}}}\omega_A\cdot\int_{I/\mathbb{Q}^*} f^-(|t|)|t|^{2s+n}d^*t$$

Nun ist $I/\mathbb{Q}^*\simeq(0,\infty)\times\prod_p\mathfrak{o}_p^*$, und $\int_{\mathfrak{o}_p^*}d^*t_p=1$. Dadurch wird

$$\int_{I/\mathbb{Q}^*} f^-(|t|)|t|^{2s+n}d^*t=\int_0^1 t^{2s+n}\frac{dt}{t}=\frac{1}{2s+n}$$

analog für den zweiten Summanden mit $2s$ statt $2s+n$.

$\int_{G_A/G_{\mathbb{Q}}}\omega_A$ ist die Tamagawa-Zahl $\tau(G)$. So wird

$$Z^-(s,\Phi)=\tau(G)\{-\frac{\Phi(0)}{2s+n}+\frac{\hat\Phi(0)}{2s}\}+\int_{G_A/G_{\mathbb{Q}}\times I/\mathbb{Q}^*} f^-(|t|)|t|^{2s}\sum_{\eta\neq 0}\hat\Phi(X\eta t^{-1})\omega_A(X)d^*t$$

Das Integral wird durch die Substitution $t\mapsto\frac{1}{t}$, bei der d^*t invariant bleibt, zu

$$\int_{G_A/G_{\mathbb{Q}}\times I/\mathbb{Q}^*} f^+(|t|)|t|^{-2s}\sum_{\eta\neq 0}\hat\Phi(X\eta t)\omega_A(X)d^*t$$

Der letzte Summand ist der Plusteil der Zetafunktion Z zur Standardfunktion $\hat\Phi$ an der Stelle $-s-\frac{n}{2}$. Wie gesehen, ist dies eine in der ganzen s-Ebene holomorphe Funktion von s. Ergebnis:

$$\tilde Z(s,\Phi)=Z^+(s,\Phi)+Z^+(-s-\frac{n}{2},\hat\Phi)+\tau(G)[-\frac{\Phi(0)}{2s+n}+\frac{\hat\Phi(0)}{2s}]$$

Mit Hilfe von Satz 28 lesen wir hieraus ab

Satz 29. *Die Tamagawa-Zahl der speziellen orthogonalen Gruppe einer quadratischen Form in $n\geq 3$ Variablen über $\mathbb{Q}$ ist gleich 2.*

Wir haben den Satz nur für anisotrope Formen bewiesen. Will man ihn allgemein beweisen, so muß man außerdem die Sphäre vom Radius 0 berücksichtigen. Im Diagramm (D) muß man dafür statt e auch isotrope Vektoren zulassen. Deren Stabilisator ist aber nicht eine orthogonale Gruppe in einer Dimension weniger, sondern das semidirekte Produkt aus einem $(n-2)$-dimensionalen Vektorraum und einer orthogonalen Gruppe in zwei Dimensionen weniger. Deshalb braucht man für den Induktionsschluß die Verankerung in Dimension 3 und 4 (und zusätzliche Betrachtungen für das semidirekte Produkt)